

苏州大学

本科毕业设计(论文)

学院(部)	数学科学学院		
题 目	高中生数学建模能力水平的 调查研究		
年 级	2017 级	专业	数学与应用 数学(师范)
班 级	数学与应用 数学(师范)	学号	1707402035
姓 名	陈子怡		
指导老师	王金才	职称	副教授
论文提交日期	2021 年 5 月		

苏州大学
本科毕业设计（论文）独创性声明

本人郑重声明：所提交的本科毕业设计（论文）是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本设计（论文）不含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人承担本声明的法律责任。

作者签名：_____ 日 期：_____

苏州大学
本科毕业设计（论文）使用授权声明

本人完全了解苏州大学关于收集、保存和使用本科毕业设计（论文）的规定，即：本科毕业设计（论文）的著作权以及文中研究成果的知识产权归属苏州大学。苏州大学有权向国家有关部门或第三方机构送交毕业设计（论文）的复印件和电子文档，允许毕业设计（论文）被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存和汇编毕业设计（论文），可以将毕业设计（论文）的全部或部分内容编入有关数据库进行检索。

涉密设计（论文）☐

本设计（论文）属 _____ 在 _____ 年 _____ 月解密后适用本规定。

非涉密设计（论文）☐

论文作者签名： _____ 日 期： _____

导 师 签 名： _____ 日 期： _____

高中生数学建模能力水平的调查研究

中文摘要

作为贯穿高中数学内容的主线之一,数学建模是学生能动地应用数学知识工具或技术解决现实生活问题的主要表现之一.近年来,越来越多教育工作者开始重视学生数学建模能力的培养.本研究旨在调查高中生的数学建模水平现状,从建模子能力角度检测学生的数学建模水平,由此为中学数学建模教学提出建议.

本文通过阅读相关文献,确定研究的评价框架,并完善评价指标,由此设计建模能力测试卷,调查学生数学建模水平现状,从建模子能力的角度分析学生的模型简化与构建、求解、解释与评价水平情况.接着从定量角度,进一步探讨学生的建模水平与其数学学业成绩是否成正相关以及短期建模教学对学生建模能力的影响.

调查结果表明:(1)高二年级学生的数学建模能力总体较低,处于中等水平之下,且个体间的差异较大;(2)学生简化与构建模型的能力平均处于水平 1~2 之间,求解、解释与评价模型的能力平均处于水平 1;(3)学生的三个建模子能力水平和数学学业成绩之间均无相关关系;(4)短期建模教学对学生求解、解释与评价模型能力发展有显著影响,对学生简化与构建模型能力的促进作用较小.

根据上述结论,本文提出了建模教学的相关建议:(1)广泛教学,长期强化建模意识;(2)有计划、分阶段、有目标地实施建模教学;(3)以能力为导向,实行多元评价方式;(4)增强研究意识,发展教师专业素养.

关键词: 高中生; 数学建模能力; 建模教学

作 者: 陈子怡

指导老师: 王金才

A Survey on the Level of Mathematical Modelling Competencies in Senior High School Students

Abstract

Mathematical modeling is an important part of high school mathematics content and an important form of expression for students to apply mathematical knowledge tools to solve real-life problems. In recent years, growing educators have begun to attach importance to students' mathematical modeling ability cultivation. The purpose of this research is to investigate the status quo of the mathematical modeling level of senior high school students, detecting the level of mathematical modeling of students from the perspective of modeling sub-ability, and make suggestions for mathematical modeling teaching.

This paper determines the evaluation framework of the research and perfects the evaluation indicators by reading related literature, thus designing the modeling ability test paper, investigating the status quo of students' mathematical modeling level, and analyzing students' modeling sub-ability, such as model simplification and construction, solving and evaluation. Then, from a quantitative perspective, further explore whether the student's modeling level is positively correlated with its mathematics academic performance and the impact of short-term modeling teaching on students' modeling ability.

The survey results show that: (1)The mathematics modeling ability of the second-year students is generally low, below the intermediate level, and the differences between individuals are large; (2)The students' ability to simplify and construct models is on average between level 1 and 2. The ability to solve, explain, and evaluate models is on average at level 1; (3)There is no correlation between the students' three modeling sub-abilities and their mathematics academic performance; (4)Short-term modeling teaching has a significant impact on the development of students' ability to solve, interpret, and evaluate models, but has a small effect on students' ability to simplify and construct models.

Based on the above conclusions, this article puts forward relevant suggestions for modeling teaching: (1)Expand the teaching scope and strengthen students' modeling awareness for a long time; (2)Carry out modeling teaching in a planned, staged and targeted

manner; (3)Implement ability-oriented and multiple evaluation methods; (4)Enhance teachers' research awareness and professional quality.

Keywords: senior high school students; mathematical modelling competencies; modelling teaching

Written by: Chen Ziyi

Supervised by: Wang Jincai

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.1.1 发展数学建模能力的重要性	1
1.1.2 高中数学建模教学与评价现状	2
1.2 研究问题	2
1.3 研究意义	3
1.3.1 理论意义	3
1.3.2 实践意义	3
第 2 章 研究综述	4
2.1 数学建模相关概念综述	4
2.1.1 数学建模的内涵	4
2.1.2 数学建模与数学应用	4
2.1.3 数学建模过程	5
2.2 数学建模能力综述	6
2.2.1 数学建模能力的内涵	6
2.2.2 数学建模能力的评价	8
2.2.3 数学建模能力评价框架	10
2.3 相关调查研究综述	12
2.4 小结	16
第 3 章 研究设计	17
3.1 研究思路	17
3.2 研究方法	18
3.2.1 文献法	18
3.2.2 测试法	18
3.3 研究对象	18
3.4 研究工具	19
3.4.1 评价框架	19

3.4.2 测试卷	21
3.5 研究实施	22
第4章 测试过程与结果探讨	23
4.1 测试卷设计	23
4.1.1 测试卷的结构及编码	23
4.1.2 测试卷的内容及作答情况	25
4.2 测试质量分析	39
4.2.1 测试的信度	39
4.2.2 测验的难度与区分度	40
4.3 测试结果及分析讨论	41
4.3.1 学生整体数学建模能力水平情况	41
4.3.2 学生建模水平与学业成绩的相关分析	45
4.3.3 短期建模教学对学生数学建模能力水平的影响分析	46
4.4 小结与原因分析	48
第5章 结论与建议	50
5.1 主要研究结论	50
5.2 对中学数学建模教学的建议	50
5.3 研究不足与展望	52
参考文献	53
致谢	57
附录 高中生数学建模能力测试卷	58

第1章 绪论

数学建模贯穿于高中数学内容的始终,发展建模能力也是高中数学教学中的重要课题之一.了解目前高中生的数学建模能力水平、分析短期建模教学对学生建模能力的影响,对改进数学建模教学有重要的参考价值.本章将对本研究的背景、研究问题及意义加以阐述.

1.1 研究背景

信息时代使人们的生活与日俱进,同时也对教育提出了新目标,即培养会学习、能适应、敢创新、善合作的人.基于这一要求,数学教育界愈来愈关注学生数学应用意识的提升、问题解决能力的发展.其中的一个代表性的观点就是强调“做”数学,将发展“问题解决”能力作为数学教育的核心^[1]¹⁹⁵⁻¹⁹⁹.此外,经合组织(OECD)在对PISA 2021 测试框架^[2]的修订与调整中,更是首次将“问题解决”定位为数学素养的根本目标之一.

数学建模常被视从外部现实世界到数学内部世界的过渡,是用数学求解现实问题的主要表现形式,其过程正是围绕“问题解决”而展开的,是学生数学应用意识淋漓尽致的体现.自实施2017年版新课标以来,我国高中开始重视学生数学建模能力的发展,对数学建模活动的探索也是接连不断.其建模课程的实施确实取得一些成果,但具体效果还尚未可知.因此,调查当下高中生的数学建模水平情况具有重要意义.

1.1.1 发展数学建模能力的重要性

纵观数学课程标准的几次修订^[3]:从1996年试验版教学大纲中首次提及“数学模型”,到2017年新课标中明确“数学建模”的核心素养地位,数学建模被逐步作为教学板块正式列入课程,其具体实施要求也被不断完善.其中对“数学建模”能力

[1]张奠宙,宋乃庆.数学教育概论[M].北京:高等教育出版社,2016.

[2]OECD. PISA2021MathematicsFramework(draft)[EB/OL]. [2021-03-16]. <https://pisa2021-maths.oecd.org/files/PISA%202021%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf>.

[3]黄健,鲁小莉,王鸯雨,徐斌艳.20世纪以来中国数学课程标准中数学建模内涵的发展[J].数学教育学报,2019,28(03): 18-23+41.

培养的重视不言而喻。

事实上，数学建模能力是一种综合能力，它源于“四基”，蕴含对数学方法的选择、对数学经验的积累、对数学思想的培养等等；而作为一种与“问题解决”息息相关的能力，它与“四能”、“三会”同样也密不可分^[4]。

1.1.2 高中数学建模教学与评价现状

近年来，高中对建模教学的尝试方兴未艾，其间产生了不少成果，也浮现出诸多问题^[5]：大部分教师无法满足数学建模的“跨技能”要求，建模课程难以开展；建模教学课例素材相对缺乏；建模活动的形式单一、枯燥无味；以应用题讲练代替建模教学；对建模的渗透无法达到常态化等等。

此外，建模教学的实际效果如何、怎样评价学生的建模水平，仍是需要攻克的重要课题。然而，最新版课程标准里虽然给出了学生建模能力的三个评价水平^[6]¹⁰³，但却不够具体，尚不具备评价功能，无法具体评价学生的数学建模能力，或许成为阻碍其进一步发展的“难言之隐”。

1.2 研究问题

相关文献表明目前我国对学生数学建模能力的评价研究大多采用过程导向型的评价方式，以学生对一个完整建模项目的完成度评判其建模水平，其弊端在于忽视了建模过程间的依赖性，无法精准判定学生的建模子能力水平。例如，某学生不能对现实问题进行简化，构建出数学模型，就无法进行后续模型的“求解”、“解释与评价”，但这只说明该生“简化与构建模型”的能力较弱，并不能判定其另外两个子能力较弱。

此外，当前国内外对数学建模教学的研究多为经验之谈，实证研究相对缺乏。本研究希望基于已有的评价框架，从建模子能力角度，设计测试题，对目前高中生的数学建模水平进行测验。

[4]史宁中，王尚志. 普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）解读[M]. 北京：高等教育出版社，2020：93.

[5]汤晓春. 高中数学教学培养学生数学建模素养的实践[J]. 教育理论与实践，2017，37(26)：62-64.

[6]中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）[S]. 北京：人民教育出版社，2020.

本研究旨在探讨以下问题：

- （1）调查当下高中生的数学建模水平情况；
- （2）判辨学生的建模水平与其数学学业成绩是否呈正相关；
- （3）探讨短期建模教学对学生数学建模能力水平的影响，并由此提出相关教学建议.

1.3 研究意义

1.3.1 理论意义

当前对数学建模能力评价理论的研究已具备一定的基础. 本研究通过文献综述整理了相关研究成果, 发现目前国内对数学建模能力的调查大多采用过程导向型的评价方式, 无法测试出学生的各个建模子能力表现. 且在目前对建模教学的研究中, 相对缺乏实证研究, 基本都为经验之谈.

本研究调查高中生数学建模水平现状, 关注学生在各建模子能力上的表现, 判辨学生的建模水平与其数学学业成绩是否呈正相关, 并通过探讨短期建模教学对学生建模能力的影响, 为数学建模的教学提供相关建议. 这一定程度上对数学建模能力评价理论进行了补充.

1.3.2 实践意义

通过对高中生数学建模水平情况的调查, 总结普遍弱项, 找出着力点, 以便在建模教学中对症下药. 此外, 本研究通过分析短期建模教学对学生建模能力的影响提出相关建议, 这对数学建模教学具有一定的实践意义.

第2章 研究综述

通过梳理相关理论与研究，本章对数学建模等相关概念给出界定，明确能力评价的理论依据，并给出国内近年对高中生数学建模能力调查研究的综述。

2.1 数学建模相关概念综述

2.1.1 数学建模的内涵

对于数学建模这一概念并没有统一的定义^[3]，一般可以将数学建模（Mathematical Modelling）看作是数学与其他领域之间建立联系的方式^[7]。

最新版课程标准中^{[6]5-6}从数学学科核心素养的角度，将“数学建模”的内涵阐述为“对现实问题的数学抽象、数学描述以及模型构建素养”，可见其内涵丰富，与其他五个数学核心素养间有着千丝万缕的联系^[4]，不仅涉及具体知识的应用，还蕴含着数学方法的选择、经验的积累、数学思想的培育等等。

2.1.2 数学建模与数学应用

修订版课程标准中还明确指出，数学模型是从现实世界到数学内部世界的过渡，是数学应用的重要形式^{[6]5-6}，这里我们需要明确“数学建模”与“数学应用”的联系与区别。

张奠宙先生曾指出，目前学生所熟悉的文字应用题往往已被命题者高度抽象处理，不需要信息挖掘，也没有条件赘余，其“数学化”的过程一目了然、求解方式较单一、所得结论也唯一确定；且不需要学生经历“信息采集”、“提出假设”、“简化问题”、“检验结论合理性”、“进一步修正完善已有模型”的过程^{[1]172}，而这些恰恰是“数学建模”的精彩之处。

事实上，数学建模虽涉及应用问题，但二者并不等同：数学应用仅仅是从发现问

[7]Mark M. Meerschaert. Mathematical Modeling[M].Academic Press, 2013: vii-xii.

题到构建模型、再到求解、最终验证数学结论的过程，不包括从实际情境中提出问题的过程，也不包括在不合乎实际情况下再次循环往复的过程^{[8]1-3}. 因此，数学建模的范围要更为宽泛.

2.1.3 数学建模过程

对于建模活动过程的阶段划分，学者们各持己见，主要有以下几种模型：

最简单地，把建模看作是从现实世界到数学内部世界的过渡，就自然形成选择模型、构建模型、求解模型以及检验模型四个步骤，即“四循环说”^[3]，其中“选择模型”步骤指的是用数学的语言阐述问题，进而选择合适的数学模型（图 2-1）.

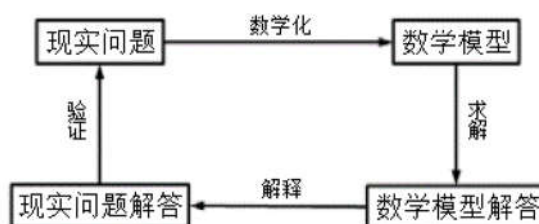


图 2-1 数学建模“四循环”图示

进一步，考虑到建模者在面对一个现实问题时，往往会先对其进行简化，将其转化为一种较为简洁的形式，它与“现实原型”不同，并不能体现实际问题的所有方面，因此 Blum 等人^[3]认为从实际问题到数学模型，还需经历“现实模型”的构建，因而在“四循环”的基础上建立了“五循环”模型^[9]（图 2-2^[3]）.

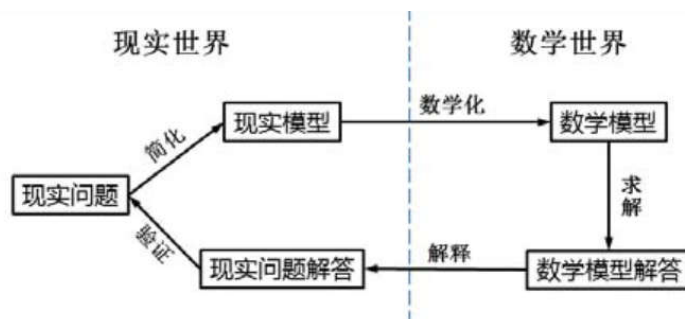


图 2-2 数学建模“五循环”图示

[8]徐稼红. 中学数学应用与建模[M]. 苏州：苏州大学出版社，2001.

[9]Maaß,K. What are modelling competencies? [J]. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 2006, 38(2): 113–142.

之后, Blum 与 Leiß^[10]又将建模者对问题的理解与实际问题加以区分, 将对问题简化过程独立出来, 并强调“表达”过程(即把所得结论反馈到实际情境中), 提出了“七循环说”(图 2-3). 这一理论得到了数学建模研究者最为普遍的认可与应用.

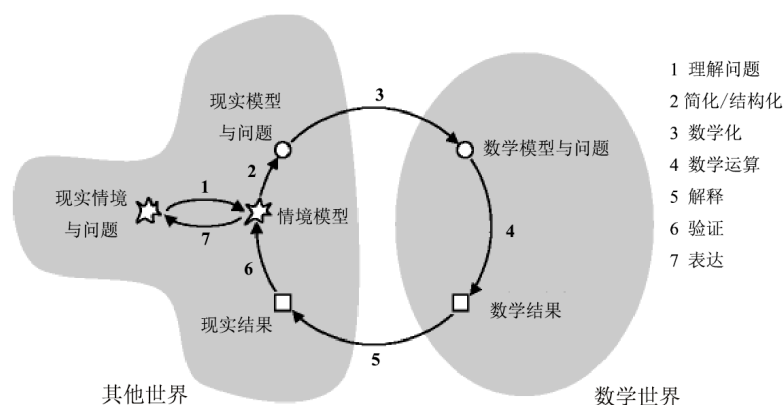


图 2-3 数学建模“七循环”图示

新课标^{[6]5-6}中对于数学建模过程的描述是“能从数学的角度发现并提出现实情境中的问题, 接着剖析问题, 进而建立数学模型, 设定参变量、运算求解, 再验证结论、做出完善, 最终解决问题”, 这里采用的正是“七循环说”^[3].

纵观各种对数学建模过程的阶段划分, “七循环说”与“五循环说”的应用最为广泛. 实际上, 各种划分方式在本质上是一致的, “多阶段”是在“少阶段”基础上的进一步细化与扩充. 一方面, 我们可以从中瞥见对建模过程的“可视化”要求在不断提高; 另一方面, 也启示我们要牢牢抓住建模过程的关键性步骤.

因此, 本研究基于建模过程“七循环说”, 将数学建模的过程简化为“简化问题并建立数学模型”、“求解数学模型”、“解释与评价模型”三个子过程.

2.2 数学建模能力综述

2.2.1 数学建模能力的内涵

正如喻平^[11]等人对数学建模能力的定义——“针对数学或科学问题、实际生活问

[10]Blum,W.,&Leiß,D. How do students and teachers deal with mathematical modeling problems?[M]// C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S.Khan. Mathematical modelling(ICTMA12): Education, engineering and economics. Chichester: Horwood, 2007: 222-231.

[11]喻平. 数学学科核心素养要素析取的实证研究[J]. 数学教育学报, 2016, 25(06): 1-6.

从内容领域上看, 数学建模能力体现在数学内容领域的各个方面. 在高中数学学科逻辑体系里, 数学建模贯穿于各个内容板块, 是数学课程内容的四条主线之一, 和代数与几何、函数、概率与统计的内容也是交相呼应的^[12].

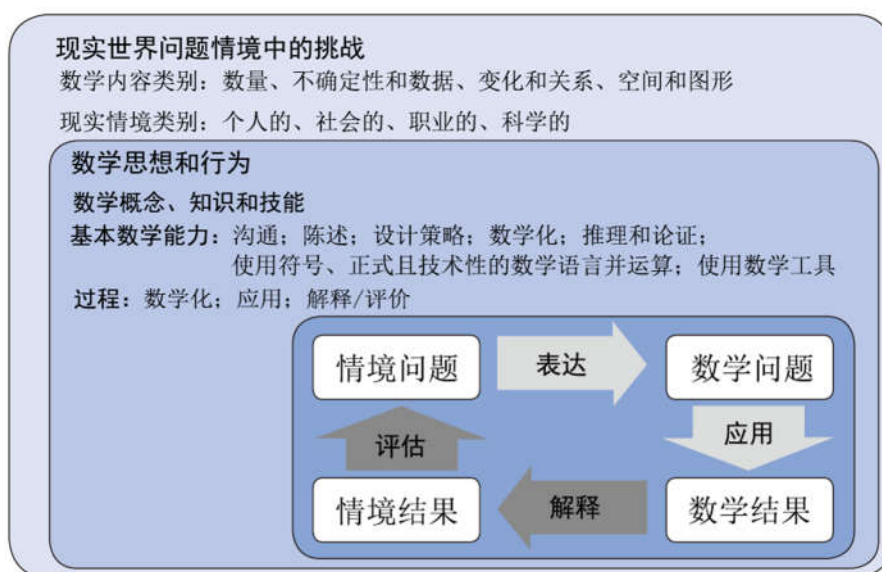


图 2-4 PISA 2012 数学素养测试框架

此外，对比 PISA 2012^[13]与 PISA 2021^[2]的数学素养测试框架，不难发现：PISA 2012（图 2-4）将数学内容独立开来，归属上是游离在建模过程以外的；而在 PISA 2021（

[13]OECD, PISA2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy, PISA, OECD Publishing, Paris, 2013.

图 2-5) 则通过“环环相扣”的表现形式来突显数学建模与“知识内容”的紧密关联性.

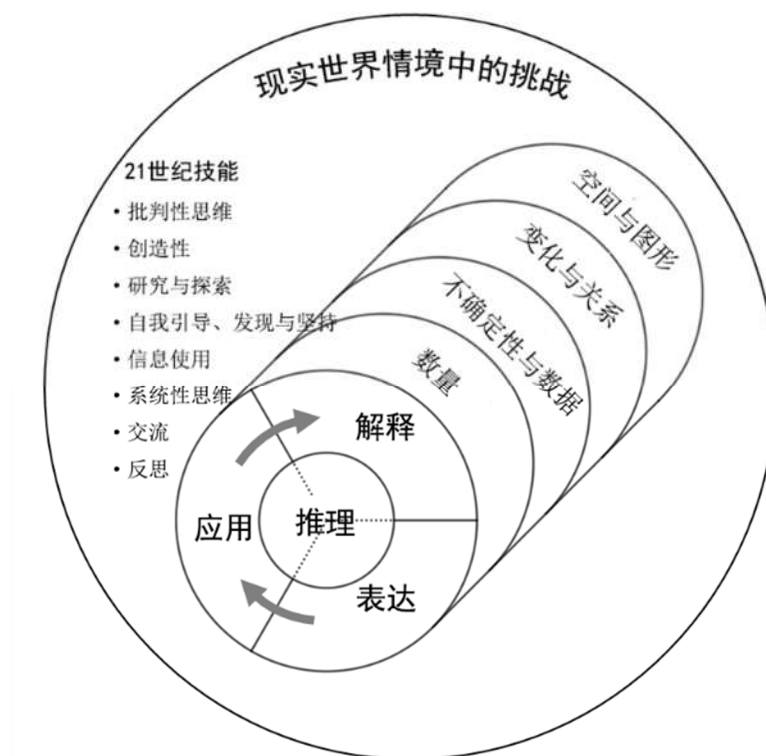


图 2-5 PISA 2021 数学素养测试框架

此外，从概念的外延上看，数学建模能力与其他数学能力（素养）之间是紧密关联的。

综上所述，数学建模能力是多种能力的集合体。它源于“四基”，即基础知识、技能、数学思想以及数学活动经验，是通过对现实世界的感知，构建数学概念意象，过渡到数学抽象与逻辑推理，解决实际问题，从而获得对知识本质性认识的能力。

2.2.2 数学建模能力的评价

对于数学建模能力的评价可以分为宏观与微观两个角度。

宏观上，是基于整个建模历程，划分数学建模能力的水平层次。Jensen 着眼于“覆盖范围”、“行动半径”、“技术水平”三个维度（图 2-6）来评估数学建模能力^[14]；

[14]Jensen,T.H. Assessing mathematical modelling competency[M]// C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan.

徐斌艳与 Ludwig^[15]基于“七循环模型”将数学建模能力划分成六个层级（水平 0 至 5），根据学生在整个建模过程中的表现判定水平；新课标中也通过考虑建模过程中所关联到的“思维表达”等四个层面，从对不同层次学生的发展要求，简单界定了毕业、高考以及拓展三个水平^[6]¹⁰³。

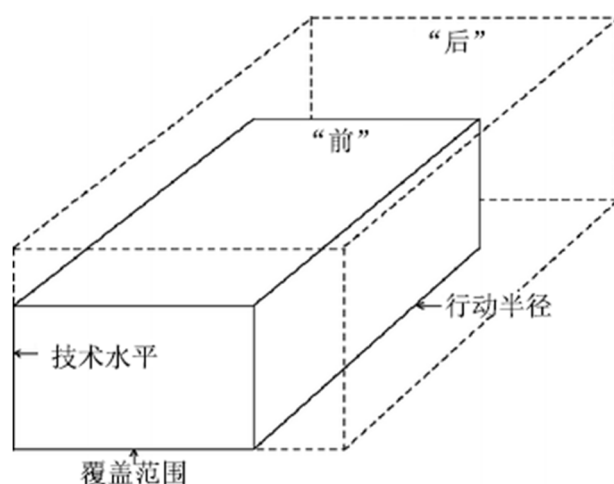


图 2-6 Jensen 的“建模能力三维评价框架”

微观上，则是评价建模过程中所涉及各个子能力。Blum 和 Kaiser^[16]将数学建模能力分为情境的理解、数学化、模型化，以及阐释结果、检验模型这 5 个子能力；Peter Frejd 和 Jonas Bergman Ärleback^[17]基于 Kaiser 的理论，将数学建模能力分为 7 个子能力：对现实问题的简化假设能力、明确现实模型目标的能力、阐明问题的能力、分配参变量的能力、用数学语言阐述实际问题的能力、选择模型的能力、解释结果并联系实际的能力；在 Haines 和 Crouch 开发的多项选择测试题^[18]中，测试了包括“简化假设、阐明目标、拟定问题、确定参变量、建立数学表达、选择模型、解读图形表示、返回实际情境进行验证”^[19]这 8 个子能力。

Mathematical modelling (ICTMA12): Education, engineering and economics. Chichester: Horwood, 2007: 141-148.

[15]徐斌艳, MatthiasLudwig. 中德学生数学建模能力水平的比较分析——以中国上海和德国巴登符腾堡州学生为例[J]. 上海教育科研, 2008, (8): 66-69.

[16]Galbraith, P.L.,Stillman,G.,Brown,J., & Edwards,I. Facilitating middle secondary modelling competencies[M]// C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S.Khan. Mathematical modelling(ICTMA12): Education, engineering and economics. UK: Horwood, 2007: 130-140.

[17]FrejdP., ÄrlebackJ.B.. First Results from a Study Investigating Swedish Upper Secondary Students' Mathematical Modelling Competencies[M]// Kaiser G., Blum W., Borromeo Ferri R., Stillman G.. Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, vol 1. Springer, Dordrecht, 2011: 410-411.

[18]Haines, C., Crouch,R.. Recognizing Constructs within Mathematical Modelling[J]. Teaching Mathematics and Its Applications, 2001, 20(3): 129-138.

[19]Houston K. Assessing the “Phases” of Mathematical Modelling[M]// Blum W., Galbraith P.L., Henn HW., Niss M..

然而，宏观与微观两种评价方式并不冲突. 宏观评价方式是基于建模全过程所反映的各子能力的综合水平评价，微观评价方式则对各子能力的一种精细化的评价. 宏观评价方式可以互为补充、相得益彰.

2.2.3 数学建模能力评价框架

我国学者基于上述数学建模能力的评价理论，进一步构建了能力评价框架.

喻平^[20]认为数学核心素养源自知识，因而以“知识学习”为抓手，综合 Blum 模型、SOLO 理论和 PISA 模型，将知识的“理解”、“迁移”、“创新”三种形式作为评价核心素养的三个水平层级，并由此建立数学核心素养的评价标准.

随后，不少研究者基于喻平的评价标准上，构建了各种评估数学建模能力的框架，主要有一维、三维、四维 3 种形式.

一维框架是根据知识理解、迁移、创新的能力要求，简单分为三个水平层级. 例如，李华与胡典顺^[21]基于新课标的要求，建立了数学建模等核心素养的评价体系，将数学建模素养水平简单分成三个层级；沐方华和洪雨沛^[22]从对学生的思维要求出发，将建模能力分为能够解决基于“模仿”的简单问题、基于“应用”的较复杂问题、基于“创新”的复杂问题 3 个水平层次.

进一步地，一些研究以 Jensen 的“三维评价框架”为原型，建立了数学建模能力三维评价框架. 杨静从结构、内容、水平三个维度评估高中生的数学建模能力(图 2-7)，其中结构上包括简化与构建、求解、解释与评价模型三个步骤，内容上包含函数、代数与几何、概率与统计的数学学科知识，水平上则在理解、掌握、灵活应用三个层次的基础上给出了每一水平层级的具体行为指标^[23]；沐方华等人^[24]对比 PISA 和 TIMSS 两个国际数学测试的框架后，构建出了类似的框架.

Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study. Springer, 2007: 255.

[20]喻平. 数学核心素养评价的一个框架[J]. 数学教育学报, 2017, 26(02): 19-23+59.

[21]李华, 胡典顺. 基于数学核心素养评价框架的试卷测评研究——以 2019 年高考全国卷为例[J]. 数学教育学报, 2020, 29(02): 18-23.

[22]沐方华, 洪雨沛. 基于数学建模素养评价的试题分类框架研究[J]. 中学数学教学, 2020(02): 1-3+28.

[23]杨静. 高中生数学建模能力评价研究[D]. 苏州大学, 2017.

[24]沐方华, 董洁. 新课标背景下数学建模能力的评价研究——基于 PISA 和 TIMSS 数学测评框架的对比分析[J]. 中学数学月刊, 2020(07): 59-61.

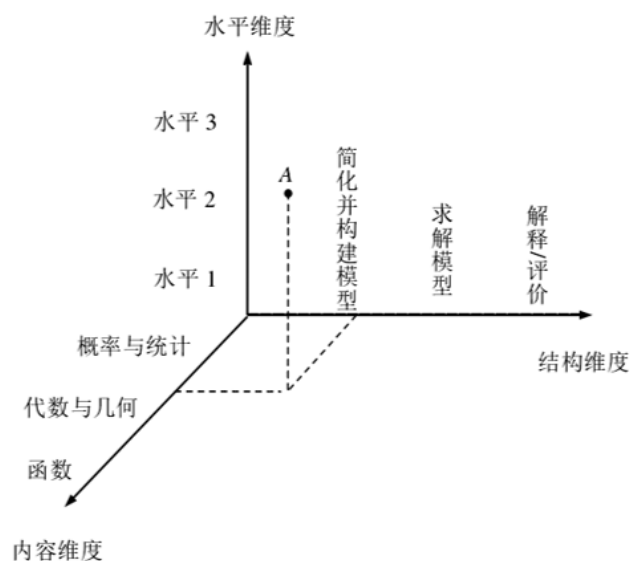


图 2-7 数学建模能力的三维评价框架

朱娅梅^[25]参照 PISA 2018 数学素养测试框架与 Jensen 的“三维框架”，构建了包含情境、内容、过程、水平 4 个要素的四维评价框架（图 2-8）。特别地，其水平维度上参考了德国数学教育标准的做法，根据“数学化”难易程度将建模能力分为再现、联系、反思三个水平层级：“再现”指能在简单情境中直接套用标准的数学模型；“联系”指在较综合的情境下，对标准模型进行迁移、重组；“反思”则是在复杂情境中设计创造出新的数学模型。

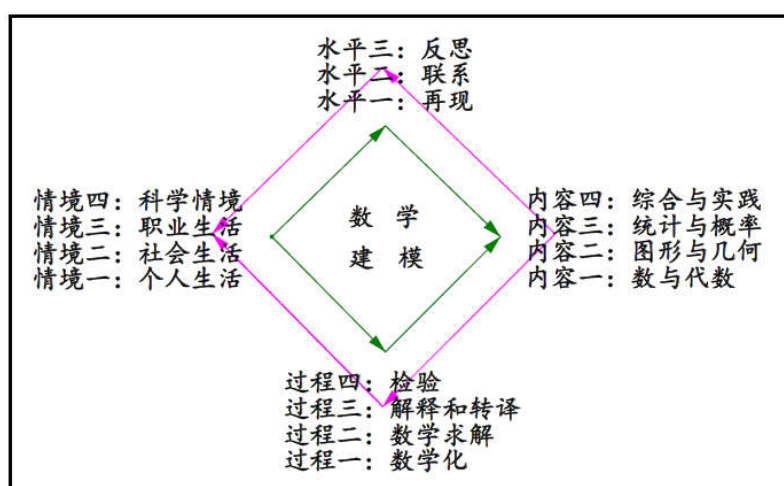


图 2-8 数学建模能力的四维评价框架

[25]朱娅梅. 义务教育阶段学生数学建模能力评价研究[D]. 华东师范大学, 2014.

相较而言，一维的框架并不能涵盖所有的评价指标，而四维框架中的“情境”要素是从 PISA 测试的框架中演变而来的，只是题目的表现形式，并不涉及数学内容的本质，对本研究中的评价过程影响不大，可以略去。因此，综合对比三种评价框架，三维的评价框架更符合本研究的调查要求。

2.3 相关调查研究综述

下面依照研究时间先后，梳理近年国内对高中生数学建模能力水平的调查研究，以便对学生建模能力水平情况能有一个初步认知。

徐斌艳和 Ludwig^[26]根据建模七阶段将数学建模能力分化为 5 个层次（水平 1~5），并通过“削菠萝”问题对 166 名新疆中学生进行测试，实验表明中学生的数学建模能力与课程标准的要求存在不小的差距，大部分学生的“数学化”能力（将现实模型译为数学模型，并精确表述成数学问题的能力）薄弱；随后他们又在原有的评价体系中增加了“水平 0”层级，即学生无法理解情境且不能识别出任何数学问题，进一步对中德两国 9 至 11 年级的一千余名中学生进行测验^[15]，测试发现：被试的数学建模能力较低；两国学生的整体建模水平相当；随年级的上升学生的建模能力会有所提升，因此需把握教学的最佳时机。

纪雪颖^[27]通过自编的三道试题对上海六所高中的 390 名学生进行测试，研究表明上海地区高中生的平均数学建模能力处于“水平 2”，大部分学生在“简化问题、数学化”环节上存在困难，但基本能够顺利地在数学世界内解决问题，很难有结合实际检验结论是否合理的意识。此外，建模能力与数学学业成绩基本无关，一些数学学业后进生也可能具备较高的建模水平^[28]。

牛艳杰^[29]根据 Blum 的建模过程图示和 SOLO 分类理论，将学生的数学建模水平分成 3 个层次 6 个水平，并采用“削菠萝”问题测试了苏州中学高一年级某班的 52 名学生，结果表明：该班的整体建模能力较弱，多数学生都处于前 3 个水平层次，尤

[26]徐斌艳, LUDWIG Matthias. 中学生数学建模能力水平的实验分析[J]. 中学数学月刊, 2007(11): 1-2+30.

[27]纪雪颖. 高中学生数学建模能力水平研究[D]. 华东师范大学, 2010.

[28]纪雪颖. 高中学生数学建模能力与数学学业成绩关系的调查与分析[J]. 上海教育科研, 2009(07): 57-58+70.

[29]牛艳杰. 高一学生数学建模能力水平的调查与分析[D]. 苏州大学, 2011.

其缺乏从现实情境提取数学问题的能力；此外，男女建模能力并无显著差异。

许二龙^[30]在武汉两所高中（重点高中与普通高中）高一年级各选取不同层次的两个班级（高分班与平行班）的学生，测试建模能力，发现学生建模能力与所在学校、班级的层次成正相关，且男生的建模能力高于女生。

崔萍^[31]选择“罐头筒的设计”、“削菠萝”两道试题对咸阳某城镇高一、高二两个年级在校生进行测试，结果表明：该校学生的整体建模能力较弱，只达到水平 1；该校学生的建模能力存在年级差异，高二学生优势更大，男生的建模能力明显高于女生；不同数学成绩的学生的间不存在显著的建模水平差异；建模培训能促进学生建模能力的发展。

孙翔宇^[32]同样通过两道试题，选取两所学校的 233 名学生进行建模能力检测，结果表明高中生的数学建模能力整体不高，高三学生明显优于高一，男女建模能力无明显差异，建模能力与数理成绩成正相关，增强数学阅读能力能促进建模能力的发展。

刘佳艳^[33]设计了六道测试题对四川两所高中的 298 名学生的建模能力进行评价，测试结果表明男女生的建模能力无明显差异，但城市高中学生在测试中的总体水平明显高于乡镇高中。

彭墨缘^[34]根据建模过程的各环节将数学建模能力细化为 16 个子能力，编制了“共享单车的组装”等三道测试题，对上海、大同、长沙的三所高中高一年级 490 名学生的数学建模能力进行测验。结果显示，三个城市的学生数学建模能力大多集中在水平 2 与水平 3，属于较低层次；在子能力方面，学生尤其缺乏在真实情境中确定变量间关系的能力，以及返回现实情境对结果进行验证的意识；男女生的平均建模能力相当，二者对于熟悉情境都能较轻松地提取数学模型，但在不熟悉情境的处理上，男生的表现要更好。

杨静^[23]参考 Blum 的建模过程图示，设计了“内容、结构、水平”三维评价框架，并编制了“学校课桌椅高度合理性”、“体育音乐中的数学”两道测试题，对苏州中学高一两个班级共计 91 名学生的建模水平进行评价，测试发现学生的建模能力整体

[30]许二龙. 高中生数学建模能力水平研究[D]. 华中师范大学, 2013.

[31]崔萍. 城镇高中学生数学建模能力水平的调查与研究[D]. 西北大学, 2014.

[32]孙翔宇. 上海市高中生数学建模能力的调查与分析[J]. 教育测量与评价, 2016(06): 44-49.

[33]刘佳艳. 高三学生数学建模素养的调查研究[D]. 四川师范大学, 2017.

[34]彭墨缘. 高中生数学建模能力性别差异研究[D]. 华东师范大学, 2017.

偏低，尤其表现在缺乏建模常识、无法用数学语言表达问题以及没有解释结论、评价模型的意识上。

陈英杰^[35]同样利用“削菠萝”问题，对哈尔滨第九中学高一某班的学生进行测验，发现该班大部分学生的数学建模能力较弱，基本处于前三个水平层次，具体表现在建模意识、问题的分析与转化能力、知识的灵活应用能力不足。

张振敏^[36]选用三道试题，在扬州市、驻马店市的两所高中各抽取两个班级（重点班与平行班），对其中 230 名高一学生作测验，研究发现：第一，高一学生的整体建模能力偏低（处于水平 1 至 2 之间）；第二，男生的建模水平略微高于女生；第三，重点班水平明显高于平行班，但与数学学业成绩几乎无关；第四，江苏学生的水平明显高于河南。

牛伟强^[37]根据 Kaiser 等人的数学建模微观能力理论，将建模能力细分为对模型的假设、构建以及检验三个子能力，通过对上海某高中 567 名学生的测试发现：学生建模水平整体偏低，尤其缺乏对模型的假设与构建能力；学生的建模能力没有明显的性别差异，但存在年级差异。为探究建模教学干预对学生建模能力的影响，他设计了两套试题卷（每套卷子三道测试题）分别对实验组与对照组做前测、后测。测试结果显示，建模子能力的专项训练和真实的建模任务的教学可以在短期内促成建模能力的提升；建模教学干预对学生的数学建模能力发展有显著的促进作用。

陈鹭^[38]将建模能力分成数学阅读能力等 5 个子能力，并划分 6 个水平，对厦门两所高中的 200 名学生进行测验，得出以下结论：高一学生的整体建模能力偏低，处在水平 1~2 间，且最缺乏发散创新思维；建模能力无明显性别差异；学生的建模能力与所在学校层次间呈正相关。

宋周丽^[39]采用徐斌艳对建模水平的评价标准，通过“削菠萝”等六道测试题对郴州市四所高中的部分高三生进行测验，结果反映：高三生的数学建模能力总体较低（处于水平 1、2 之间）；学生的整体建模水平与所在学校的层次有关，但并不存在明显的差别。

[35]陈英杰. 哈尔滨高一学生数学建模能力调查分析[D]. 哈尔滨师范大学, 2017.

[36]张振敏. 高中生数学建模能力的调查研究[D]. 扬州大学, 2018.

[37]牛伟强. 高中生数学建模能力发展研究[D]. 华东师范大学, 2019.

[38]陈鹭. 高一学生数学建模素养现状调查研究[D]. 集美大学, 2019.

[39]宋周丽. 高三学生数学建模能力的调查研究[D]. 湖南科技大学, 2019.

张伟旭^[40]将数学建模能力分为“现实情境数学化”、“数学模型建立”、“数学模型分析”、“返回现实情境验证数学结论”4个子能力，通过对山东部分高一学生的测试发现：学生的总体建模水平较低，且较难掌握后三个子能力，尤其缺乏“返回现实情境验证数学结论”的能力；相比之下，女生的建模能力水平的稳定性更好。

胡冬明^[41]对湖南某高中高一年级的六名学生（三男三女）进行个案研究，通过观察、测试与访谈，得出以下结论：男生的建模水平略高于女生；建模水平高的学生在学业成绩上的表现更好，其在课堂教学过程中的参与程度更高。

梁馨之^[42]将数学建模能力划分为问题表征等五个子能力，对金昌市两所高中高二、高三的450名学生进行测试，测试结果显示：高中生的数学建模能力处在中下水平；学生普遍在阅读理解、问题表征上的表现较好，在抽象概括、反馈评价上的表现一般，在运算求解上的表现最弱；男生的建模能力水平高于女生；理科班学生的建模能力更强；学生的建模能力存在年级优势。

马小飞^[43]根据新课标中给出的“饮料包装问题”案例编制了三道测试题，从“情景与内容”、“过程与结论”、“思维与计算”、“表征与交流”、“应用与反思”五个维度将建模能力分为四个水平，并对北京两所高中部分高二生进行测验，得出以下结论：高中生的数学建模能力偏低，基本居于水平1；虽然男生的建模能力略微优于女生，但并无显著差异；文理班的建模水平存在显著差异，文科班的表现较弱；学生的建模能力与其对数学建模的认知呈正相关关系。

唐丽艳^[44]根据课程标准的要求与相关研究理论，建立了建模能力分析框架：横向内容上考虑“数量关系”与“空间几何”，纵向水平上涵盖“模仿与举例”、“构造与求解”、“转译与检验”三个水平，并编制了18道测试题（“数量关系”与“空间图形”各9题，每一水平各设计3个题项）。在对五个城市两千多名高中生进行测验后发现：高中生的建模能力整体情况较差；就发展态势而言，高二生的建模能力最强，高三其次，高一最弱；学生在“数量”与“几何”两部分内容上的表现均较弱；学生在三个水平上的发展并不均衡，其中“模仿与举例”水平远要高于另外两个水平。

[40]张伟旭. 高中生数学建模能力的现状调查与分析[D]. 山东师范大学, 2020.

[41]胡冬明. 高中生数学建模能力水平的个案研究[D]. 云南师范大学, 2020.

[42]梁馨之. 高中生数学建模能力现状调查研究[D]. 西北师范大学, 2020.

[43]马小飞. 我国高中生数学建模能力的测评研究[D]. 中央民族大学, 2020.

[44]唐丽艳. 高中生数学建模能力发展状况调查研究——以核心素养为视角[J]. 唐山师范学院学报, 2020, 42(06): 148-153.

综合对上述调查研究的梳理，能够得出以下观点：我国高中生的数学建模能力基本偏低，具体表现为对问题的简化与模型构建能力较弱，对数学结论的解释、对模型的评价意识缺乏；建模能力受年级影响较大；一般认为，建模教学能促进学生建模能力的提升。然而，对于数学建模能力是否存在性别差异、是否与数学学业成绩成正相关等问题上，各研究者的观点存在争议。

2.4 小结

在整理数学建模的国内外相关研究后，可以得出如下结果：

首先，数学建模的内涵极为丰富，“数学应用”只是对其过程的局部描述。数学建模流程的划分模型众多，其中 Blum 等人的“七循环说”得到了最为广泛的运用。

其次，数学建模能力是多种能力的集合体，它与“问题解决”密切相关。对于数学建模能力水平的评价，大体上可分成宏、微观两种视角：宏观上，是对建模全过程的评价，其中 Jensen 的“三维评价框架”和徐斌艳的“六水平评价框架”应用较为广泛；微观上，是对建模各环节所体现的子能力的评价，评价框架多种多样。两种评价形式可以互为补充。在目前已有的数学建模能力评价框架中，杨静等人的三维框架更适合作为本研究的评价工具。

最后，我国高中生的数学建模能力基本较低，尤其表现为对模型的简化与构建能力偏低、对模型进行解释与评价的意识薄弱。

第3章 研究设计

本章主要对本研究的思路、方法、对象、工具及实施加以说明. 其中, 最重要的是阐明研究中所使用的评价框架, 明确数学建模能力测试卷的编制依据.

3.1 研究思路

本文的研究思路如图 3-1 所示.

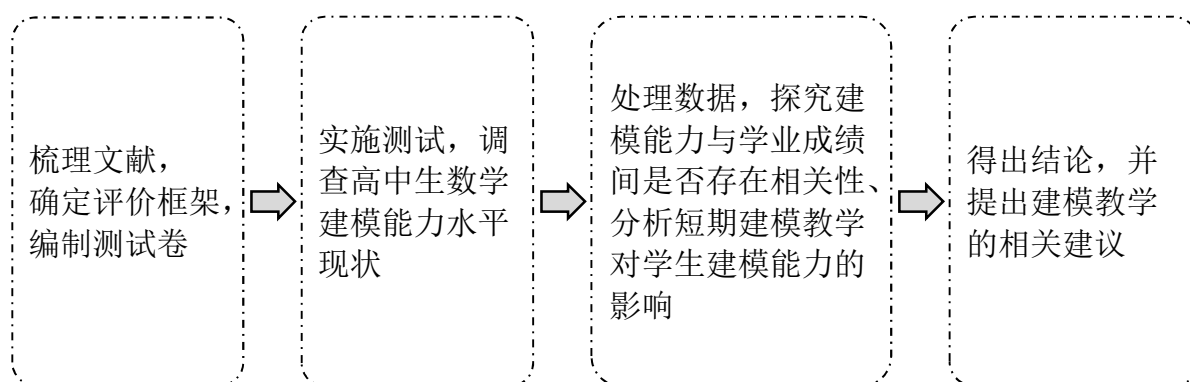


图3-1 研究流程图

首先, 整理国内外相关文献, 界定“数学建模”、“数学建模能力”等相关概念, 并了解近年国内对高中生建模能力的调查研究情况. 同时, 在阅读文献的过程中, 确定研究所使用的评价框架, 并以此为依据设计“高中生数学建模能力测试卷”.

接着, 实施测试, 调查学生在三个建模子能力上的水平表现, 由此总结出高中生数学建模水平的现状.

然后, 结合测试结果与各学生的数学学业成绩、建模教学活动参与情况, 进行数据分析. 由此探究学生的建模能力与其数学学业成绩之间是否成正相关, 并从建模子能力角度探讨短期建模教学对学生建模能力的影响.

最后, 通过上述分析, 得出结论, 并提出建模教学的相关建议.

3.2 研究方法

3.2.1 文献法

本研究通过文献法进行文献梳理与理论构建. 利用中国知网（CNKI），万方数据知识服务平台，Springer，ResearchGate 等网站资源，梳理国内外相关研究，由此界定“数学建模过程”、“数学建模能力”等相关概念，并确定研究中所使用的评价框架.

3.2.2 测试法

测试法指对苏州星海实验中学高二年级的 335 名学生进行数学建模能力水平的测验. 本次测试共设 6 题，其情境均源自实际生活，其中，五道题采用子任务形式分别检验学生在模型的简化与构建、求解、解释与评价子能力上的水平；一道综合解答题借鉴 *Comap* 出版的数学建模手册^[45]中的做法，通过问题串引导学生完成从现实情境中确定建模目标、设定参变量、进行简单求解、最终结合实际检验结果合理性、评价模型并推广应用的完整过程.

3.3 研究对象

本研究的测试学生是苏州工业园区星海实验中学高二年级的学生，该中学自 2018 年下半年起，便开设了“数学建模校本选修课程”与“数学建模社团”，对高一、高二两个年级的部分学生进行数学建模教学，并在 2020 年 11 月正式成为北京师范大学数学建模教育实践基地学校. 期间，学校以“理论教学”、“学生汇报”、“专家讲座”三种不同形式对学生的数学建模能力进行培养.

在 2020 年末，笔者加入了苏州工业园区星海实验中学“高中生数学建模能力的培养与评价研究”课题组，参与子课题“高中生数学建模能力水平的调查研究”中

[45]Comap. Mathematical Modeling Handbook II: The Assessments[M/CD]. [2021-04-08].
<https://www.comap.com/modelingHB/HBII.html>.

的测量评价工作. 因此, 笔者借此契机测验该所中学 335 名高二年级学生的建模水平, 其中男生 183 人、女生 152 人. 此外, 为探究建模教学对数学建模能力的影响, 根据数学建模课程或社团的参与情况进一步对学生加以区分, 其中参与过建模课程或社团的学生有 62 名.

3.4 研究工具

3.4.1 评价框架

通过梳理阅读文献, 发现国内对学生数学建模能力的评价主要有两种方式, 一种是以喻平^[20]为代表的“目标导向型评价”, 一种是以徐斌艳^[26]为代表的“过程导向型评价”. 而过程导向型评价方式更适用于日常教学过程中, 作为一种形成性评价, 因此本研究采用目标导向型评价方式.

喻平教授将数学学科核心素养能力分成三个层级, 即“知识理解”、“知识迁移”、“知识创新”^[20], “理解”指形成、发展基本技能, “迁移”指在新的情境中综合运用知识, “创新”指解决非常规、开放性问题或自我发现新知. 基于这一评价标准, 后续研究者构建了数学建模能力的一维^[21-22]、三维^[23-24]、四维^[25]评价框架. 分析比较后, 本研究在杨静^[23]所设计的三维评价框架基础上, 改进其水平维度的行为指标, 构建了如下图 3-2 所示的评价框架.

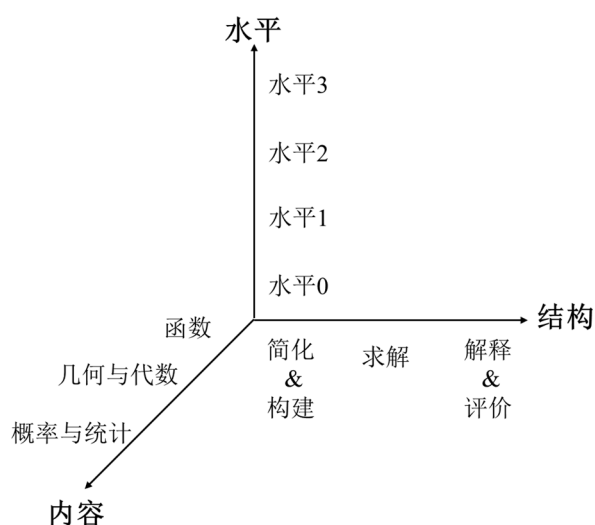


图 3-2 数学建模能力的评价框架

(1) 内容维度

内容上是指在建模过程中学生运用到的数学知识内容。

新课标中突出高中数学的四条内容主线——除“数学建模与数学探究”外，还有“函数”、“代数与几何”、“统计与概率”。因此评价框架的内容上包括函数、几何与代数、统计与概率三部分的学科知识。

(2) 结构维度

结构上是指数学建模步骤中对模型的简化与构建、求解、解释与评价三个环节。这里基于 Blum 和 Leiß 的“七循环模型”，对其中某些阶段进行合并，将数学建模过程简化为三个环节。

其中，模型的简化与构建的具体表现是理解问题，做出假设以简化问题，并进行数学化，转译为数学问题，进而构建出数学模型；模型的求解是指在数学内部利用数学工具或技术处理所建模型，得到数学结果的过程；模型的解释与评价则是结合现实，对所得结果进行解释与合理性验证，获得现实结果，并对模型进行优缺点评价、完善改进以及应用推广的过程。

(3) 水平维度

水平是指学生在上述三个环节中所表现的能力情况。

这里参考喻平教授对核心素养水平的分级^[20]，特别地，在模型的简化与构建环节上，借鉴朱娅梅^[25]对水平的划分思路，根据“数学化”的难易程度，分成了“再现”、“联系”与“创新”水平。考虑到部分学生尚不能达到水平 1 的层次，故添加水平 0，各水平层次的具体行为表现如表 3-1 所示。

表 3-1 各水平层次的行为表现

	模型的简化与构建	模型的求解	模型的解释与评价
水平 0	无法将现实问题转化为数学问题，构建不出数学模型	无法确定选择何种数学工具或技术求解模型	不能返回现实情境对所得数学结果进行解释、验证
水平 1	“再现”：仅能在简单熟悉的情境中选择合适的数学模型，或识别出标准数学模型直接套用	仅能够模仿已学案例进行运算求解，不具备数学技术的基本操作能力	能够结合实际情境，对所得数学结果进行解释、验证

水平 2	“联系”：能在较复杂的情境中，对标准数学模型进行迁移或重组	能够利用数学工具求解常规模型，并能用数学软件进行一些简单操作来求解模型	能够对所建数学模型进行合理性检验，并评价优缺点
水平 3	“创新”：能在非常规问题情境中，创造性地构建出新的数学模型	能够较灵活地使用不同数学工具或技术对所建立模型进行运算、分析求解	能够对模型进行反思，针对不足提出改进方案，并指出模型的应用推广方向

3.4.2 测试卷

基于上述评价框架，从建模子能力的角度出发，编制数学建模测试卷，对学生在“简化与构建模型”、“求解模型”、“解释与评价模型”三个子能力上的表现水平进行测试。测试题的情境均来自生活实际，语言简洁易懂，并保证所运用的数学学科知识在学生已学过的范畴内。

测试卷设有 6 题，其中有 4 道简答题和 2 道解答题。其中各测试题所对应的具体评价维度见

表 3-2.

表3-2 测试题评价维度明细表

题号	评价维度		
	内容维度	结构维度	水平维度
1	函数	简化与构建	水平 1：再现
2	几何与代数		水平 2：联系
3	(1) 几何与代数	求解	依学生作答情况划分水平
	(2) 函数		
4	几何与代数	解释与评价	水平 1：解释验证
5	(1) 几何与代数		水平 2：评价
	(2)		水平 3：完善/推广
6	(1) 概率与统计	简化与构建	水平 1：再现
	(2)		水平 3：创新
	(3)	构建与求解	
	(4)	解释与评价	水平 1：解释验证
	(5)		水平 2：评价
	(6)		水平 3：完善/推广

3.5 研究实施

在开始正式测试前，研究者在苏州工业园区星海实验中学高一年级选取了 24 名不同数学能力层次的学生（高、中、低三个层次各 8 名学生）进行了试测，测试时间为 45 分钟。由于学生基本都能够完成所有考题，因此认为测验时长是适当的。在收集试测数据后，针对试测中所反映的问题，经过与课题组其他成员讨论后，将存在干扰的问题删除，对试题中表述不清、问题描述存在歧义的地方进行了修正。例如，在评价试测的过程中，发现学生对题 1 拉面有多长问题中“一扣”的理解存在歧义，认为第一扣是第二次对折，于是对题干的语序做出了调整。

在修改后，课题组利用已完善的测试卷对学校高二年级的学生进行了数学建模能力的测验。正式测验时长也为 45 分钟，学生需在闭卷情况下独立解答。最终共计回收有效答卷 335 份。

第4章 测试过程与结果探讨

本章分为四个部分. 第一部分主要介绍测试卷的设计, 说明测试卷的结构及编码、展示试题内容与部分学生作答情况; 第二部分主要说明测试卷的质量, 检验其信度、难度与区分度; 第三部分展示测试结果, 阐述学生数学建模能力的总体状况、辨析建模能力水平与学业表现的相关性、探讨短期建模教学对学生建模能力水平的影响; 第四部分是对调查结果的小结, 并对其中的原因做出分析讨论.

4.1 测试卷设计

基于前文所确立的评价框架, 本研究选取了国内外相关研究项目中的测试题进行改编, 最终形成学生数学建模能力测试卷. 在编制测试卷时, 遵循以下原则: 题目出自实际情境, 贴近现实; 需运用的学科知识都是学生已学的内容; 语言简洁易懂.

4.1.1 测试卷的结构及编码

在设计测试卷的结构时, 本研究还特别考虑了建模步骤间的相互依赖性的干扰. 例如, 如果一个人在简化问题、构建数学模型方面的能力很薄弱, 他可能无法达到解释验证数学结果的步骤, 因而不会被认为具有很高的建模能力, 尽管一旦问题被简化, 他能够继续进行建模过程. 因此本次测验结合子任务、整体任务两种方式编制试题, 综合考察其数学建模水平. 其中测试卷的前 5 题采用的均是建模子任务形式, 即截取某一建模子过程单独评估学生的某一建模子能力; 第 6 题则是用一个相对完整的建模任务, 对学生在建模全程中所反映的建模子能力进行评估.

此外, 除个别水平层次外, 每一水平均设置 2 道对应题, 以减少由学生对情境的熟悉度、知识内容的掌握程度带来的干扰.

测试卷的结构如表 4-1 所示.

为方便对数据进行编码, 分析学生数学建模能力的整体情况, 将每一水平所对应的题目共赋值 10 分, 全卷共计 90 分. 例如题 1 与题 6 (1) 均对应简化与构建子能力

的水平 1——“再现”水平，两题各赋 5 分. 特别地，题 6（3）承接题 6（2）均涉及模型的简化与构建，题 6（3）中对模型的求解只涉及简单的数学运算，因此该题对模型的求解部分不设分值，只考察学生是否能根据所设目标成功构建出相应数学模型.

表 4-1 测试卷的结构

题号		情境	评价维度			题型	分值
			内容维度	结构维度	水平维度		
1		拉面有多长	函数	简化与构建	水平 1：再现	简答	5
2		铁路建造	几何与代数		水平 2：联系		10
3	(1)	线性规划	几何与代数	求解	依学生作答情况而定		30
	(2)	函数拟合	函数				
4		照片比例尺	几何与代数	解释与评价	水平 1：解释验证	解答	
5	(1)	灯塔问题	几何与代数		水平 2：评价		5
	(2)				水平 3：完善/推广		5
6	(1)	食堂窗口优化	概率与统计	简化与构建	水平 1：再现		5
	(2)		几何与代数		水平 3：创新		2
	(3)			构建与求解			8
	(4)			解释与评价	水平 1：解释验证		5
	(5)				水平 2：评价		5
	(6)		水平 3：完善/推广		5		

接着根据各题得分，对被试的三个建模子能力划分水平. 其中同一水平的对应题得分取二者的最高分，达到小题分值的 80%则判定其子能力达到该水平，逐级判定，最终确定其水平层次. 特别地，由于题 6（2）、6（3）间存在前后影响，不可将二者单独割裂开分析，设计时特意分成两小题是为了设置“思维台阶”引导学生思考，因此在编码时，将两题的累加得分作为水平 3“创新水平”的得分.

以简化与构建模型能力为例，取题 1 与题 6（1）得分的最大值作为该子能力水平 1 的得分，若得分小于 4 分，则判定该生的简化与构建模型能力为水平 0，否则判定该生达到水平 1“再现水平”，接着继续根据题 2 得分是否达到 8 分判定其是否达到水平 2，如此下去，最终确定学生简化与构建模型能力的水平层次.

4.1.2 测试卷的内容及作答情况

测试卷中各题的具体内容如下.

问题 1 “拉面有多长”：

拉面是我国传统面食，其中的抻面技术甚至衍生出了面艺表演.师傅要先将面团搓成长条，接着双手各握一端将其拉长、对折，不断重复拉长与对折的动作.

如果将每次对折称为“一扣”，请你估计拉 4 扣时拉面共有多长？



【参考作答】：由于师傅抻面时的长度略短于双臂，所以一根拉面的长度约 1.6m，拉 4 扣后，就得到 2^4 根拉面，

所以拉面的总长度为 $1.6 \times 2^4 = 25.6 \text{ m} \approx 26 \text{ m}$

故拉面约有 26 米长.

（因假设不同，答案不唯一，只要构建出 2^4 这一指数模型即可）

【学生作答示例】：

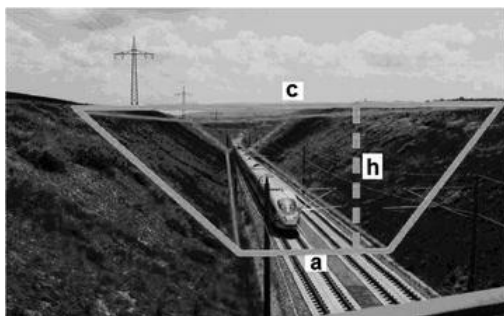
解：拉面师傅大约高 175cm，所以臂长大约为 175cm，且抻面有 4 根，
所以加起来有 28m。

问题 2 “铁路建造问题”：

如图是一张铁路轨道的照片，请你根据照片构建数学模型，来估算建造该铁路轨道时，从该地移走了多少土？（可作草图说明，列出公式并标注变量的含义即可，不需计算出具体数值）



【参考作答】：将问题转化为计算壕沟的体积，壕沟的形状近似棱柱体，作图：

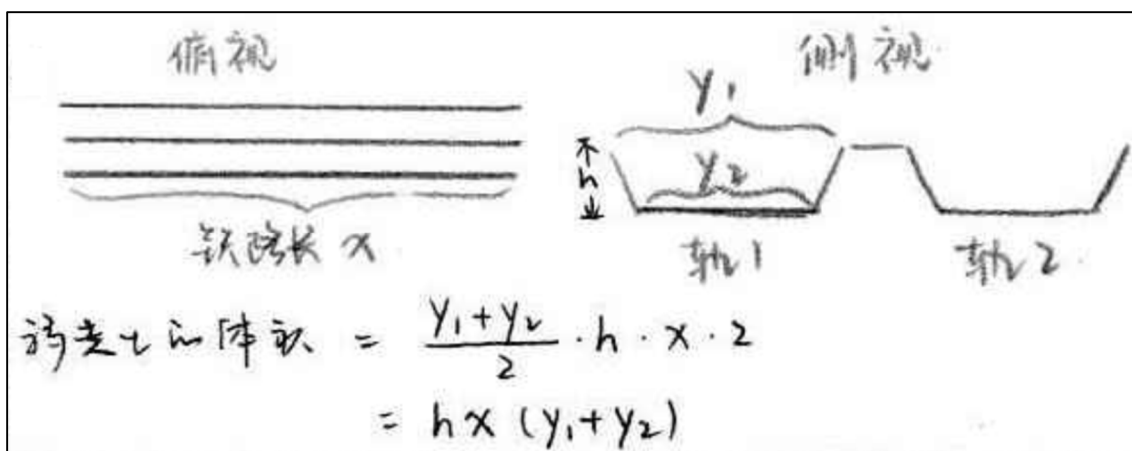


棱柱体的体积可以用梯形面积和壕沟长度 l 相乘：

$$V_p = S_{\text{梯形}} \cdot l = \frac{1}{2} (a + c) \cdot h \cdot l$$

（作出草图，构建出“棱柱体体积模型”或其他，言之有理即可）

【学生作答示例】：



题 1、2 用于检测学生对现实问题的简化以及数学模型的构建能力.

题 1 改编自朱娅梅等人对八年级初中生的建模能力测试题^{[25][57]}，学生需先结合实际对“一扣”的长度做出估算，做出假设来简化问题，再将问题数学化，构建“指数函数模型”. 该题中模型数学化的难度较低，学生容易联想到用指数函数来解决问题，属于对模型的“再现”水平.

题 2 来自 Martin 等人的一项师生长期建模项目中的任务题^[46]，同样需要先将问题进行简化，从照片中抽象出空间几何体模型，将问题转化为“求几何体的体积”。本题从沟壕照片中抽象出“棱柱”或其他几何体模型的过程并不容易，对学生抽象思维水平要求较高，属于对模型的“联系”水平。

问题 3 “模型的求解”：

下面是两个已构建的数学模型，你会如何求解？（请给出你能想到的**所有**求解方案，每种方案用一句话说明即可，**不需算出具体数值**；如需利用数学软件技术，请明确软件及操作）

(1) 某工厂生甲、乙两种产品. 已知甲产品每吨的生产成本为 20 万元，需要场地 200m^2 ；乙产品每吨的生产成本为 30 万元，需要场地 100m^2 ，该工厂的生产场地为 900m^2 且总投资预算不超出 140 万元. 问：如何安排生产可获利最多？

对于上述问题，可建立如下数学模型：

设生产甲产品 x 吨，乙产品 y 吨，利润为 S 万，则据题意可列出约束条件：

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 14, \\ 2x + y \leq 9, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

以及目标函数 $S = 3x + 2y$.

对于上述线性规划模型，你会如何求解？

(2) 根据苏州市统计年鉴，可查得从 1953 年至 2010 年苏州历次人口普查数据资料如下：

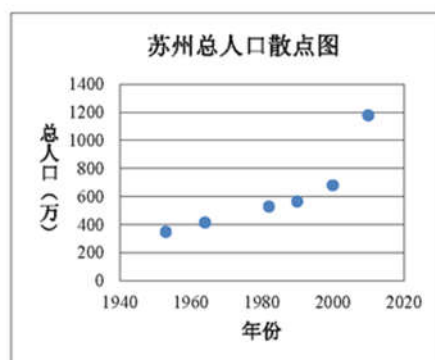
年份	1953	1964	1982	1990	2000	2010
总人口(万)	348.23	414.13	527.53	564.36	679.22	1176.91

在 2020 年进行的第 7 次人口普查的数据尚未公布，请根据前 6 次的人口普查数据估计 2020 年苏州市的总人口数.

对于该人口预测问题，可以考虑建立拟合模型解决：

[46]Bracke M., Geiger A.. Real-World Modelling in Regular Lessons: A Long-Term Experiment[M]// Kaiser G., Blum W., Borromeo Ferri R., Stillman G. Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, vol 1. Springer, Dordrecht, 2011: 525-549.

先在坐标系中描出数据的散点图，直观判断散点近似在一条抛物线上；于是考虑用二次函数回归曲线作为拟合模型。



你会如何求解该二次曲线方程？

题 3 的两小题考察学生对模型的求解能力，分别改编自上海^{[8]50-53}、北京^{[8]70-71} 两市的中学生数学应用竞赛题. 基于前文所确定的评价框架，对模型的求解能力的评价需要根据学生的作答情况确定水平层次，编码标准如

表 4-2 所示.

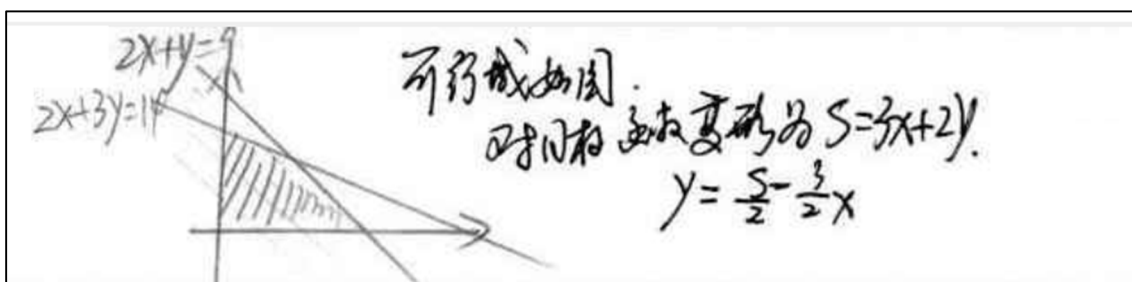
表 4-2 模型的求解能力各水平的编码标准

水平层次	行为描述	题 3（1）作答表现	题 3（2）作答表现
水平 0	无法确定选择何种数学工具或技术求解模型	空白	空白
水平 1	仅能够模仿已学案例进行运算求解，不具备数学技术的基本操作能力	能想到常用的图解法	利用“待定系数法”求解
水平 2	能够利用数学工具求解常规模型，并能用数学软件进行一些简单操作来求解模型	不仅能想到用图解法，还能想到 Excel “规划求解”操作	“待定系数法”、利用 Excel 建立回归方程

水平 3	能够较灵活地使用不同数学工具或技术对所建立模型进行运算、分析求解	除了图解法、Excel“规划求解”外，还能提供其他求解思路，例如利用 Matlab、Python 等编程语言做优化计算	除“待定系数法”、利用 Excel 建立回归方程外，还能提供其他求解思路，如利用 Matlab、C++ 编程等拟合曲线
------	----------------------------------	---	---

【学生作答示例】：

题 3 (1)：



能够利用已学的“图解法”求解，判定其模型求解能力达到水平 1.

① 平面直角坐标系，两条直线与坐标轴面积中取值。
 ② Excel 限定条件。

能想到“图解法”及“Excel”两种方法，判定其模型求解能力达到水平 2.

题 3 (2)：

(2) 设 $y = ax^2 + bx + c$
 分别取两组数据，每组各三个数据，各自计算 a 、 b 、 c ，调整均值。

能够利用已学的“待定系数法”求解，判定其模型求解能力达到水平 1.

① 记 $y = \hat{b}w + \hat{a}$ $w = x^2$ 最小二乘法
 ② Excel 中拟合, 选二次函数.

能想到用“待定系数法”、Excel 工具拟合求解, 判定其求解能力达到水平 2.

问题 4 “照片比例尺问题”：

艾丽估算出她在度假时参观的岩石高约 10 米. 请根据照片判断她的结果是否合理, 并说明理由.



【参考作答】：不合理, 由于岩石的高度大约是女孩的三倍, 如果结果正确, 则女孩的身高必须超过 3 米. (说明“女孩身高范围”即可)

【学生作答示例】：

不合理. 大约为 3m 多.
 由图可得人的身高约为岩石 $\frac{1}{3}$, 而人的正常身高不会大于 2m
 故不合理

该题来自 Hankeln 等人的测试项目^[47], 需要学生根据照片中的比例估算出女孩的身高范围, 进而发现所得数学结果不符合实际的结论. 本题主要考察学生是否有将数学结果带回现实进行解释、合理性验证的意识, 尚不涉及对模型本身的评价, 以此检验学生对模型的“解释与评价”能力是否达到水平 1.

[47]Hankeln C., Adamek C., Greefrath G. Assessing Sub-competencies of Mathematical Modelling—Development of a New Test Instrument. In: Stillman G., Brown J. (eds) Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education. ICME-13 Monographs. Springer, Cham, 2019: 143-160.

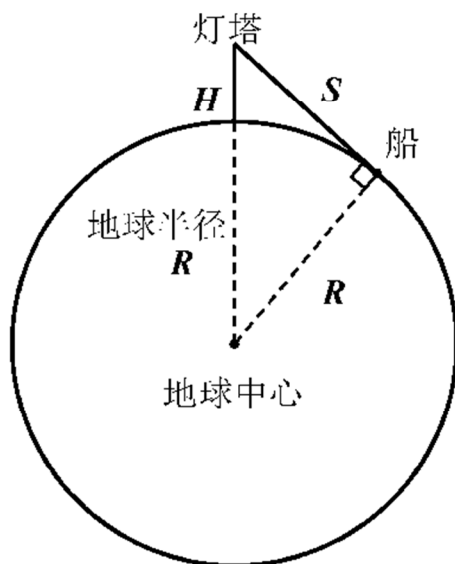
问题 5 “灯塔问题”：

在欧洲的布莱梅港岸边有一座灯塔，高为 30.7 米，用来警告看到它的船只其位置已经靠近海岸. 问：船离海岸线多远时，船员将首次从地平线看到灯塔？

对于这个问题，徐娜给出了如下构建数学模型的思路：



首先对问题进行简化，将地球看作球面，船看作点，假设灯塔和船之间可见。
已知灯塔高度 $H = 30.7$ 米 $= 0.0307$ 千米，地球半径 $R \approx 6371$ 千米，设要求的船与灯塔间距离为 S 千米。可以建立如下图所示的数学模型：



接着对图中的直角三角形使用勾股定理，得 $S^2 + R^2 = (R + H)^2$ ，

$$\text{于是 } S = \sqrt{H^2 + 2RH}$$

由于灯塔高度 H 远远小于地球半径 R ，所以 H^2 也远小于 $2RH$ ，可以忽略不计。

$$\text{于是 } S \approx \sqrt{2RH} \approx 19.8 \text{ 千米}$$

因此，可以得到结论：当船离海岸线约 19.8 千米时，海员将会第一次从地平线看到灯塔。

- (1) 请你结合实际，对徐娜所建立的模型进行评价，说明模型有何优缺点。
- (2) 针对徐娜所建的模型不足，你会如何进行改进？可作图说明。

【参考作答】：

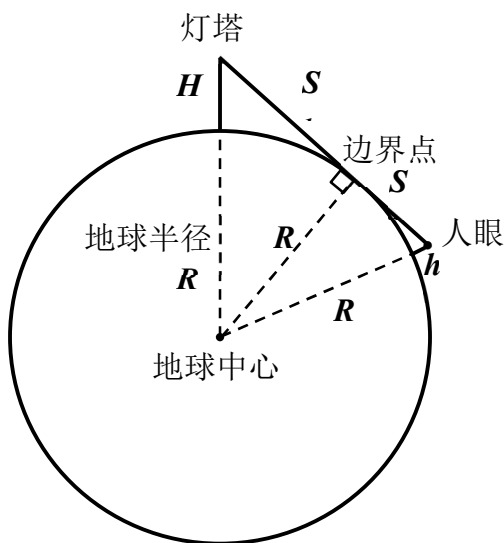
(1) 说出优缺点，言之有理即可。

(2) 根据不足：“考虑到船高及人眼的高度，不能将船近似为一个点，该模型不精准”，改进模型：

① 简化假设，构建数学模型：

将地球看作球面，假设船员站在 2.2 米高的船上或更高的瞭望台上，加上他的身高，比如 1.8 米，则人眼高度 $h = 2.2 + 1.8 = 4 \text{ m}$ 。

灯塔的高度 $H = 30.7 \text{ m} = 0.0307 \text{ km}$ ，地球的半径 $R \approx 6371 \text{ km}$ ，设要求的是灯塔顶部到人眼的距离为 $S \text{ km}$ 。作出草图：



② 求解模型：

使用两次勾股定理，分别得到

灯塔顶部到边界点的距离

$$S_1 = \sqrt{(H + R)^2 - R^2} = \sqrt{H^2 + 2RH}$$

以及 人眼到边界点的距离

$$S_2 = \sqrt{(h + R)^2 - R^2} = \sqrt{h^2 + 2Rh}$$

于是，灯塔顶部到人眼的距离为

$$S = S_1 + S_2 = \sqrt{H^2 + 2RH} + \sqrt{h^2 + 2Rh} \approx 26.9 \text{ km}$$

（或使用余弦定理的方法，可得到类似结果；根据简化假设的不同所得数据不同，结果应在 19 ~ 40 km 之间）

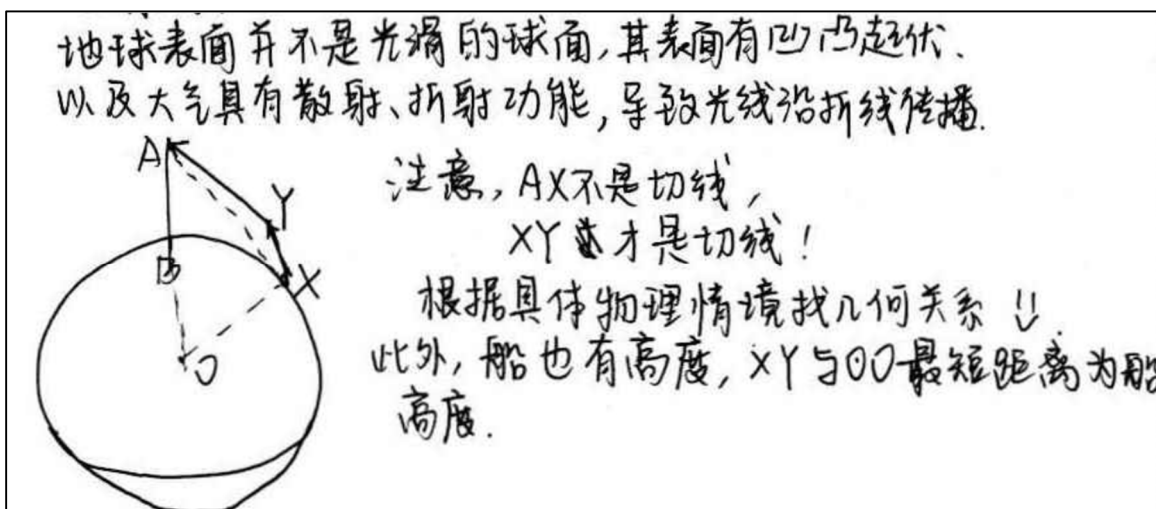
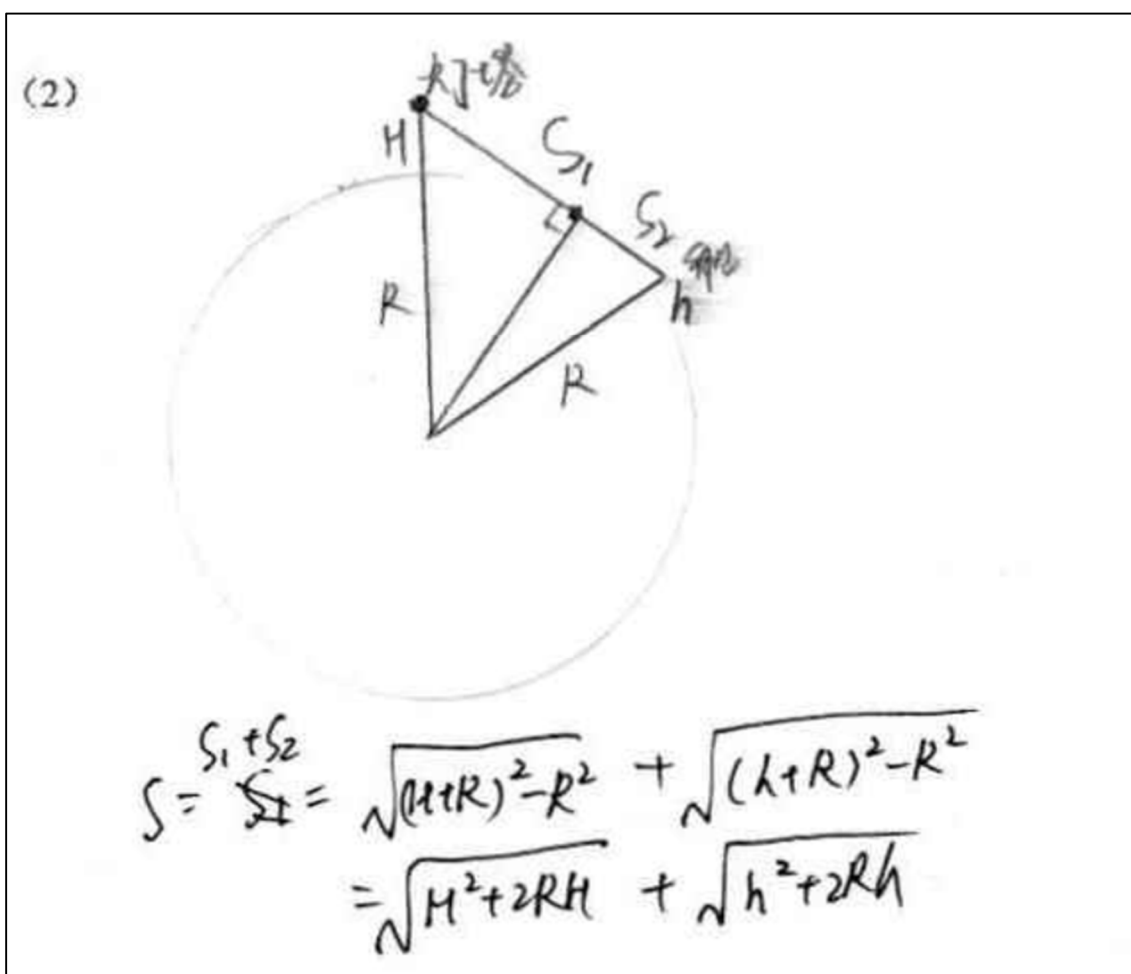
得到结论：当船距海岸线约 26.9 千米时，海员将第一次看到灯塔。

注：模型的改进方法不唯一，言之有理即可。

【学生作答示例】：

(1) 缺点：①地球不为球面，地形不平，会有误差。
②海上天气多变，会影响能见度。
③将船看作点，船有高度，会有误差。
优点：地球球面比平面更为准确。

(1) 优点：模型简易，计算方便。
缺点：船不可视为点，因为船的尺寸与灯塔差不多，且S并不为二者实际距离。



本问题改编自 Rita 等人的数学建模项目中的一道测试题^[48]，用于考察学生解释

[48]Borromeo Ferri, R.. Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens: Kognitive Analysen zu Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht. Wiesbaden: Vieweg + TeubnerVerlag, 2011:76-80.

与评价模型的能力. 题中展示了一种并不完善的数学模型, 请学生对所建模型进行评价, 指出优缺点, 并针对原模型存在的不足做出改进. 其中, 叙述模型的优缺点达到了“模型的解释与评价”能力的水平 2; 而对模型的完善与改进则达到了水平 3, 体现了对模型的“反思”意识.

问题 6 “食堂窗口优化问题”:

X中学新建了学校食堂, 每天午餐开放时间约40分钟, 三个年级近1200人在食堂同时用餐. 食堂共制作三类餐食: 第一类是选餐, 学生可凭喜好在已做好的6种菜和几种主食中任意选购; 第二类是套餐, 有炒饭、面条、盖饭三种, 套餐已盛装好, 可直接取餐; 第三类是西餐. 食堂共有16个售饭窗口, 目前设置了10个选餐窗口、4个套餐窗口、2个西餐窗口. 试运行后, 发现在选餐窗口排队等候的人较多, 有些学生受时间影响不得不去套餐、西餐窗口购餐.

为了更合理地设置窗口布局, 增加学生的用餐满意度, 学生会准备在用餐的学生中选出一些人进行问卷调查, 并由此设计出优化售饭窗口设置的方案.

请你完成以下问题:

- (1) 在发放问卷前, 要先明确调查对象. 你认为应当如何选取调查对象? 在发放问卷前, 要先明确调查对象. 你认为应当如何选取调查对象? 请说明调查方式, 并明确调查对象的构成及人数.
- (2) 你认为影响售饭窗口设定的相关因素有哪些?
- (3) 你认为优化售饭窗口的目标是什么? 你需要确定哪些变量?
请你根据优化目标, 设出相关参变量 (可用字母表示), 进行数学运算, 给出优化后的各类售饭窗口数的数学表达式.
- (4) 许沐同学根据调查数据, 计算得出优化后的选餐、套餐、西餐窗口数分别为 12.45、2.37和1.18, 于是他得到“食堂应当设置12个选餐窗口、2个套餐窗口、1个西餐窗口”的结论. 他的结论是否合理? 请说明理由.
- (5) 结合现实, 说明你所建立的数学模型有何不足之处?
- (6) 你会从哪些方面对模型进行改进? 该模型还能应用于哪些其他问题情境中? 请举例说明.

【参考作答】：

(1) 采取分层随机抽样，对象应选不同年级、不同性别的学生，且样本量要适当，不能太少（例如在1200人中只取15人就太少了）。

(2) 影响因素：

- ① 每类餐食窗口服务一个学生的平均时间；
- ② 学生对各类餐食品种的喜好人数或比例；
- ③ 学生对排队时间的容忍度。

(3) 目标：各窗口售饭的总时间相等

变量：三类餐的购买倾向的人数比、购买每种餐食所需的时间

求解：设有意购买选餐、套餐、西餐的人数比为 $mx : nx : x$ ；

设这三类窗口的打饭取餐时间（不包括排队等候的时间）比为 $ut : vt : t$ 。

设三类窗口数分别为 a, b, c ，目标是保证每个窗口的售饭总时间等长。

$$\frac{mx}{a} \cdot ut = \frac{nx}{b} \cdot vt = \frac{x}{c} \cdot t ,$$

整理得

$$\frac{mu}{a} = \frac{nv}{b} = \frac{1}{c} ,$$

不妨设 $r \approx \frac{1}{c}$ ，由 $a + b + c = 16$ ，知

$$mu + nv + 1 = 16r$$

根据调查结果得到 m, n, u, v ，便可求出 r ，则取

$$a \approx \frac{mu}{r} , b \approx \frac{nv}{r} , c \approx \frac{1}{r}$$

因为 a, b, c 是正整数，

根据 $\frac{mu}{r}$ ， $\frac{nv}{r}$ ， $\frac{1}{r}$ 与整数的接近程度及 $a + b + c = 16$ 确定 a, b, c 的值。

注：（2）~（3）题有一定的开放性，可以有不同的表达方式，其中几个重要因素不可缺失：每类餐食窗口服务一个学生的平均时间，学生对各类餐食品种的喜好人数或比例。解答的过程须明确合理的目标，求的量须明确设出。考生的回答只要能够自圆其

说，有明确的表达式，目标明确，逻辑合理，即可酌情给分。

- (4) 不合理，因为结果应当符合“窗口数为整数，且总数为16个”的要求，他的结果中只有15个窗口。
- (5) 言之有理即可。
- (6) 此题为开放性问题，回答只要逻辑合理，能自圆其说即可。

【学生作答示例】：

(1) 解：调查式：分层抽样选取。
组成人数：三个年级各随机抽取200人，其中男生100人女生100人。

(2) 学生对三类餐食的态度，满意度。
三类餐食的成本，排队等候人数，等候时间，午餐开放时间

(3) ①. 在30分钟内完成分饭
②. 分饭过程中每个窗口人数均衡。
③. 准备好的饭菜分发完。
设选餐，套餐，西餐窗口数分别为 A_1, A_2, A_3
每取一份饭的时间为 T_1, T_2, T_3 。
每个窗口的人数为 C_1, C_2, C_3 。
$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 \leq 16 \\ \frac{C_1 T_1}{A_1} < 30 \quad \frac{C_2 T_2}{A_2} < 30 \quad \frac{C_3 T_3}{A_3} < 30. \end{cases}$$

(3) 目标: 使各个窗口人数平均一些
 设就餐人数每天平均值为 x_1 , 套餐为 x_2 , 西餐为 x_3 .

$$\bar{S}^2 = \left(x_1 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2 + \left(x_3 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2$$

求得 $\bar{S}^2$ 最小值即可.

(4) 不合理. 没有充分利用食堂的16个售饭窗口, 有一个空窗口未被利用
 充分利用所有窗口才能更好地优化布局.

(5) 食堂菜品多变, 每天的情况都会略有差异.
 有新生入学, 模型可能无法长期吻合.

(5) 无法准确预知一个人的多种偏好
 无法考虑空间布局

(6) 考虑学生对就餐的要求程度、经济水平、等候时间、吃饭速度、调整模型
 超市收费补贴站点

此问题改编自京师数学建模教育中心《2020 年高中数学建模(应用)能力展示活动测试题》试题六, 并借鉴 Comap 出版的 *Mathematical Modeling Handbook II* [45] 中的做法, 通过“问题串”来引导学生完成整个数学建模的过程.

其中, 题 (1) “调查方式的选取”只需转化为分层随机抽样模型即可, 属于对

模型的“再现”水平；题（2）~（5）本质上是和（1）不同的问题，“食堂窗口优化”是与学生的生活实际息息相关的问题情境，但学生无法通过“直接套用”或“迁移重组”已有的标准数学模型，属于“简化与构建模型”的“创新”水平。其中题（2）、（3）是对模型的简化构建、求解，学生需要先对问题充分理解，确定优化目标，设出关键参变量“每类餐食窗口服务一位学生的平均时间”、“学生对各类餐食品种的喜好人数或比例”等，再将问题转译成数学语言，得到数学表达式，属于模型简化与构建的水平 3 “创新水平”。题（4）、（5）考察学生“解释与评价模型”的子能力，且对能力的要求逐步提高，题（4）是对数学结果的简单解释与合理性验证，属于水平 1，而题（5）中对模型的“评价”、“完善与应用推广”则分别对应水平 2 与水平 3。

4.2 测试质量分析

一个良好测试的应当具备一定的可靠性、有效性、难易性与鉴别性^[49]173-175，即测试的信效度较高，难度与区分度恰当。由于实际操作的限制，无法对考生进行两次测试，不便对测试的信度进行分析，也无法从再测信度与复本信度的角度对测试的信度进行检验。下面从信度、难度、区分度三个指标对本次测试进行质量分析，其中采取内部一致性信度与分半信度两种方式进行信度分析。

4.2.1 测试的信度

首先，按照题号奇偶将测试的六道题分成两组，根据 335 名学生的各题得分，通过 SPSS 26.0 计算分半信度（见

表 4-3）。结果表明，测试的 Spearman-Brown 系数为 0.688，Guttman 折半系数为 0.683，都处于 0.65~0.75 间，因此可以判定本次测试的分半信度较好，在可接受范围内。

表4-3 分半信度统计

[49]朱德全，宋乃庆.现代教育统计与测评技术[M].西南师范大学出版社，1998.

克隆巴赫 Alpha	第一部分	值	0.298
		项数	3 ^a
	第二部分	值	0.396
		项数	3 ^b
	总项数		6
形态之间的相关性			0.524
Spearman-Brown系数	等长	0.688	
	不等长	0.688	
Guttman折半系数			0.683

a. 项为：第1题，第3题，第5题。

b. 项为：第2题，第4题，第6题。

再根据 13 道小题的得分检验内部一致性信度。

根据方差分析显示（

表 4-4）， $F = 274.466$ ， $P = 0.000 > 0.01$ ，由此可以证明本测验的重复测量效果较好。

表 4-4 带有图基非可加性检验的 ANOVA

		平方和	自由度	均方	F	显著性
人员间		5290.750	334	15.841		
	项间	15238.338	12	1269.862	274.466	0.000
	非可加性	1024.446 ^a	1	1024.446	234.312	0.000
人员内	残差	17519.216	4007	4.372		
	总计	18543.662	4008	4.627		
	总计	33782.000	4020	8.403		
总计		39072.750	4354	8.974		

注：总平均值 = 2.50

测验的内部一致性信度结果如表 4-5 所示，得到 $\alpha = 0.708$ ，标准化值为 0.767，这说明本测试的内部一致性信度较好。

表 4-5 内部一致性信度统计

克隆巴赫 Alpha	基于标准化项的克隆巴赫 Alpha	项数
0.708	0.767	13

4.2.2 测验的难度与区分度

本次测试中的试题均为主观题，且考生人数较多，因此采用极端分组法计算难度^{[49]230}与区分度^{[49]244-245}。

经计算，该测试的整体难度系数约为 0.47，在 0.5 左右，因此可以判定测试的整体难易适中；区分度系数为 $0.54 > 0.4$ ，表明本次测试具备很好的鉴别性。

4.3 测试结果及分析讨论

4.3.1 学生整体数学建模能力水平情况

根据上文的评价与编码标准，335 名被试在本次测试中的平均得分为 32.5，处于中等偏下水平。测验总分的标准差为 14.35，说明个体间的差异较大。整体得分分布情况如图 4-1 所示。

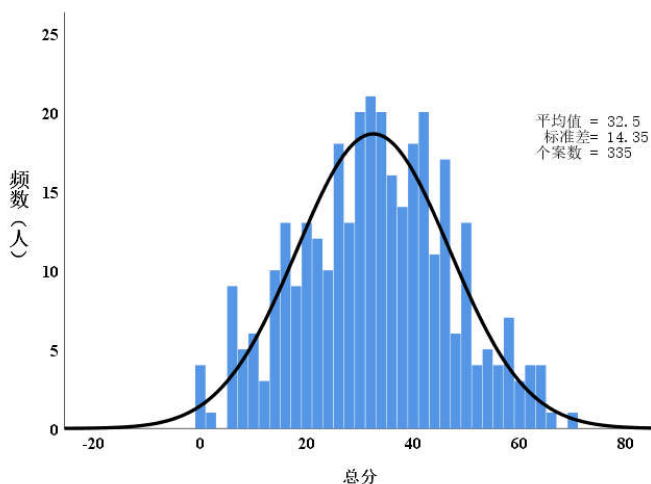


图 4-1 学生测试总分直方图

从直方图中可以直观地看出整体得分近似呈正态分布，于是利用 SPSS 26.0 作出得分数据的 P-P 图（见图 4-2）进行检验，结果印证了得分的正态分布性。

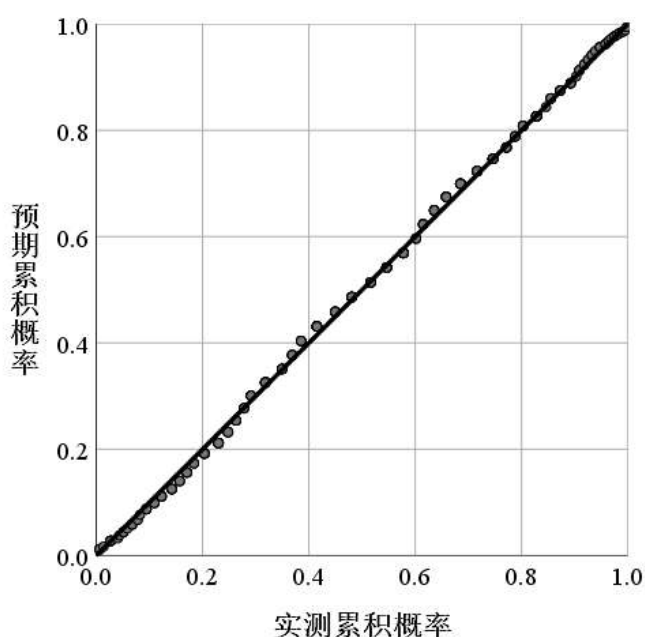


图 4-2 学生测试得分 P-P 图

上述数据表明，学生的总体数学建模能力处于中等偏下水平，且个体间的建模能力差异较大。

再进一步根据编码标准，划分学生三个建模子能力的水平层次，得到学生在模型的简化与构建能力、求解能力、解释与评价能力上的水平信息。

从横向上看，学生模型的简化与构建、求解、解释与评价能力水平的平均值分别为 1.55、0.96 和 0.92，即模型的简化与构建能力平均位于水平 1~2 之间，而求解、解释与评价能力均约处于水平 1。可以看出学生的三个数学建模子能力平均水平均不能达到水平 2，学生目前三个建模子能力均处于较低水平，尚不能令人满意。但相比之下，学生在模型的简化与构建上表现最好，模型的求解能力次之，模型的解释与评价能力最弱。

下面分析学生在三个建模子能力上的具体水平表现。

在模型的简化与构建能力上，学生的平均水平为 1.55，即在水平 1 “再现水平”与水平 2 “联系水平”之间。该子能力的水平的中位数与众数均为 2，这表明学生的简化与构建模型的水平普遍处于水平 2 “联系水平”，即能在较复杂的情境中，迁移或重组标准数学模型。

表 4-6 模型的简化与构建水平频率表

	水平 0	水平 1	水平 2	水平 3	总计
频数	39	85	198	13	335
百分比	11.6%	25.4%	59.1%	3.9%	100.0%
累积百分比	11.6%	37.0%	96.1%	100.0%	100.0%

在简化与构建模型的水平层级频率分布上（见表 4-6），超过半数的学生在简化与构建模型上能够达到水平 2 “联系水平”，大多数学生的建模水平为 1 或 2（见图 4-3），然而只有 3.9% 的学生能到水平 3 “创新水平”，即能在非常规问题情境中，创造性地构建出新的数学模型。值得注意的是，有约一成的学生尚不具备简化与构建模型的能力。

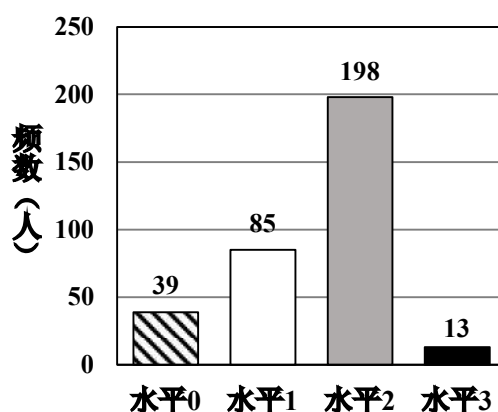


图 4-3 模型的简化与构建能力水平分布直方图

在求解能力上，其水平的平均值为 0.96，可认为是水平 1。而其中位数与众数也均为 1，这表明学生求解模型的能力普遍在水平 1 “简单运算水平”，即仅能够模仿已学案例进行运算求解，不具备数学软件技术的基本操作能力。

在求解模型能力各水平层级的具体频率分布上，大多数的学生的模型求解能力在水平 1 “简单运算水平” 及以下（见图 4-4），可见学生基本不具备数学软件技术辅助求解的操作能力，其中约三分之一的人甚至无法确定选择何种数学工具或技术来求解已知数学模型（见表 4-7）。仅有四分之一学生的模型求解能力达到了水平 2，即能够利用数学工具求解常规模型，并能用数学软件进行一些简单操作来求解模型；几乎没有学生能够达到水平 3，较灵活地使用不同数学工具或技术对所建立模型进行运算、分析求解。

表 4-7模型的求解水平频率表

	水平 0	水平 1	水平 2	水平 3	总计
频数	106	140	84	5	335
百分比	31.6%	41.8%	25.1%	1.5%	100.0%
累积百分比	31.6%	73.4%	98.5%	100.0%	100.0%

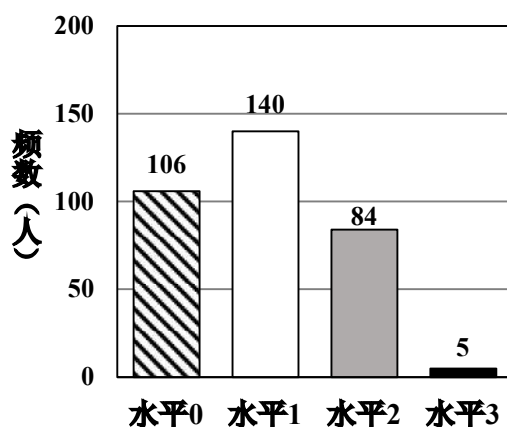


图 4-4 模型的求解能力水平分布直方图

在模型的解释与评价能力上,学生的能力水平的平均值为 0.92,也约处于水平 1.而其中位数与众数同样也均为 1,这表明学生求解模型的能力普遍在水平 1“解释与验证结果水平”,即能够结合实际情境对所得数学结果进行解释及合理性验证.

表 4-8模型的解释与评价水平频率表

	水平 0	水平 1	水平 2	水平 3	总计
频数	71	228	29	7	335
百分比	21.2%	68.1%	8.7%	2.1%	100.0%
累积百分比	21.2%	89.3%	97.9%	100.0%	100.0%

在模型的解释与评价能力水平的具体频率分布上(见表 4-8),大多数的学生能够达到水平 1“解释与验证结果水平”,但仅有约一成的学生能进一步对模型做出优缺点评价,能继续针对模型的不足提出改进意见,并指出模型应用推广方向的学生更是寥寥.此外,仍有相当一部分的学生尚不具备对模型的解释与评价能力(见图 4-5),可见学生相对缺乏对所建模型进行解释与评价的意识及能力.

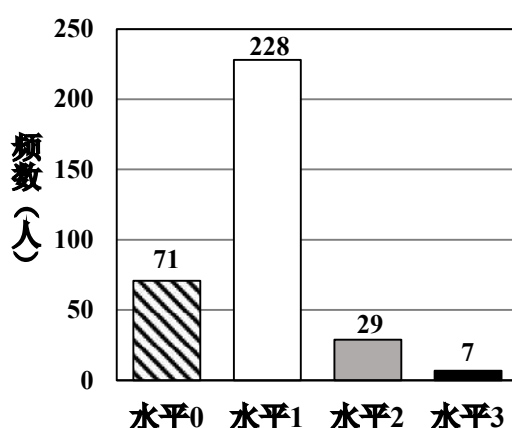


图 4-5 模型的解释与评价能力水平分布直方图

4.3.2 学生建模水平与学业成绩的相关分析

为探究数学建模能力水平和数学学业成绩之间是否成正相关,本研究从定量的角度,将学生的数学学业成绩分别与其三个建模子能力层级进行统计相关分析.

首先,通过该校教师的帮助从教学系统中获取被试学生的数学成绩.为避免单次测试带来的偶然误差,笔者分别调取了学生近三次大型测试(上一学期的期末测试、本学期的期初与期中测试)的数学学科成绩,并按照期末 40%、期初 30%、期中 30%的比重加权计算得出学生的数学学业成绩.接着对学生的学业成绩进行排序,并按照 15%: 35%: 35%: 13%: 2%的比重划分等第,将分数编码为 A、B、C、D、E 的等第,得到学生的数学学业成绩等第.

由于参加本次数学建模能力测试的 335 名高二学生中有 6 人在上述 3 次考试中存在缺考,故将其排除,对剩余 329 名学生的两组数据进行相关分析.

由于学生的建模子能力水平与数学学业成绩均为等级变量,故采取双变量 Spearman 检验(表 4-9)和 Kendall 检验(表 4-10)两种方法进行相关分析.

双变量 Spearman 检验结果表明,数学学业成绩与模型的求解能力呈极弱正相关关系($r = 0.180 < 0.3$, $P = 0.001 < 0.01$),与模型的解释与评价能力间同样呈极弱正相关关系($r = 0.150 < 0.3$, $P = 0.006 < 0.01$),与模型的简化与构建能力间不存在显著相关性($P = 0.084 > 0.05$).

表4-9 Spearman相关性检验结果

数学建模子能力	数学学业成绩	
	相关系数 r 值	显著性系数 P 值
模型的简化与构建	0.095	0.084
模型的求解	0.180**	0.001
模型的解释与评价	0.150**	0.006

表4-10 Kendall相关性检验结果

数学建模子能力	数学学业成绩	
	相关系数 r 值	显著性系数 P 值
模型的简化与构建	0.083	0.086
模型的求解	0.154**	0.001
模型的解释与评价	0.134**	0.006

根据双变量 Kendall 检验结果，可以得出同样的结论。

两种检验方法的结果均表明数学学业成绩与模型的求解、解释与评价能力间呈极弱正相关，由于相关系数极低（ $r < 0.3$ ），可视为二者不相关。

因此，学生的三个数学建模子能力水平与其学业成绩均不存在相关关系。

4.3.3 短期建模教学对学生数学建模能力水平的影响分析

由于笔者所调查学校设有数学建模选修课程、建模社团，因此本研究还对该校的建模教学效果、以及对学生的建模子能力水平的影响做了进一步探究。

首先根据接受学校建模教学与否将所调查学生分为两组，接着按学生在本次建模能力测试中的表现统计两组学生的建模子能力水平情况，再对两组学生的建模子能力水平做差异性检验。

表4-11 Mann-Whitney U检验统计结果

	简化与构建水平	求解水平	解释与评价水平
Mann-Whitney U	8430	6264.5	7238
Wilcoxon W	45831	43665.5	44639
Z	-0.054	-3.405	-2.167
渐近显著性（双尾）	0.957	0.001	0.03

注：分组变量：是否接受建模教学

由于子能力水平是等级变量，因此用 SPSS 26.0 分别对两组学生的 3 个建模子能力水平进行秩和检验。

Mann-Whitney U 检验结果显示（表 4-11），两组学生的模型求解能力存在非常

显著的差异（ $P = 0.001 < 0.01$ ），解释与评价能力存在显著差异（ $P = 0.03 < 0.05$ ），而在模型简化与构建能力上二者不存在显著差异（ $P = 0.957 > 0.05$ ）。

从统计学意义上看，该校的建模教学对学生求解模型、解释与评价模型能力的提升效果较好，而对学生简化与构建模型的能力几乎没有影响。

比较两类学生在本次测试中的表现可以发现，短期的建模教学确实能够使学生了解更多的模型求解方法，提升对数学模型的求解处理能力。其次，学生通过建模教学，能了解数学建模的一般过程，对数学结果的解释与评价意识更强，能有意识地从现实出发评价模型的优缺点，并针对不足提出改进意见，进而指出该模型的应用推广方向。

尽管上述检验结果显示，两类学生的简化与构建模型能力没有统计学意义上的显著差异，但在对比他们的模型简化与构建能力水平数据后，发现二者具有一些差异。

首先，在平均水平上，接受教学组学生的简化与构建模型能力水平的均值为 1.565，略高于未接受教学组的均值 1.549。因此，接受建模教学学生的平均简化与构建水平会略胜一筹。

表 4-12 两组学生的模型简化与构建水平分布频率对比

水平	接受组		未接受组	
	频数	百分比	频数	百分比
水平 0	7	11.29%	32	11.72%
水平 1	17	27.42%	68	24.91%
水平 2	34	54.84%	164	60.07%
水平 3	4	6.45%	9	3.30%
总计	62	100.00%	273	100.00%

其次，二者在四个水平的人数占比上也存在差异（见表 4-12）。进一步，将水平 0 视为低水平，水平 1、2 视为中等水平，水平 3 视为高水平，则可以发现两组学生的低、中、高三个水平占比有所不同。具体表现为接受建模教学组的低水平的比例更少，而高水平的比例更多（图 4-6）。

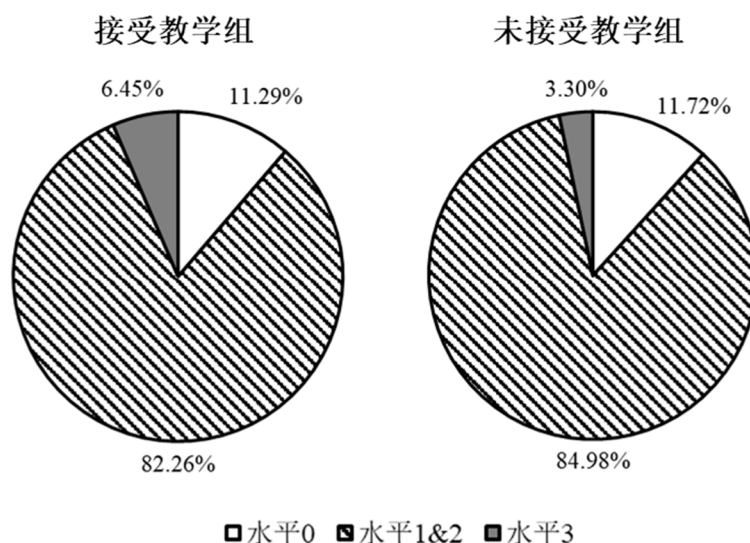


图 4-6 两组学生简化与构建水平分布比例图

由此可以判断，短期建模教学能在一定程度上提高学生的模型简化构建能力，将处于低水平的学生转化为中等水平，将中等水平学生转化为高水平，该校的建模教学初见成效。

4.4 小结与原因分析

根据本章的测试数据分析，可以总结出如下结果：

- （1）该校学生的数学建模能力平均水平处于中等偏低，且个体间能力差异较大；
- （2）学生的简化与构建模型能力平均处于水平 1 “再现水平”与水平 2 “联系水平”之间，求解模型能力平均处于水平 1 “简单运算水平”，解释与评价模型能力也平均处于水平 1 “解释与验证结果水平”；
- （3）学生的数学学业成绩与三个建模子能力水平间均无相关关系；
- （4）短期建模教学对学生求解、解释与评价模型的能力培养效果较好，但对简化与构建模型能力发展的促进作用较小。

针对以上结果，探讨其中的原因主要有以下几点：

首先，目前高中对于学生的数学建模能力培养重视尚且不足，只有部分学校开辟了建模课程，且其教学形式多以选修性课程为主，受众面较窄，只有极少部分学生接受过数学建模能力的培养，因而整体数学建模能力难以提升。

其次，学生接触较多的文字应用题与建模问题较为相近，但其中大多数都是对标准数学模型的直接套用，只有极少数需要对标准模型进行迁移、重组，且不需要学生掌握相关数学技术求解问题，得出结论后也几乎不需要进行验证，更谈不上评价、改进与推广。在日常数学学习时，学生几乎不会遇到需要用数学工具或技术来解决“原汁原味”的现实问题的情形。因此学生的简化与构建模型能力大多停留在水平 1 “再现水平”，部分学生能够达到水平 2 “联系水平”，极少数学生能达到水平 3 “创新水平”确也实属正常现象。同样，学生求解、解释与评价模型的能力停留在水平 1，其中的原因也就不言而喻了。

再次，当前对于高中生的评价方式仍以知识为导向，检验学生对于数学学科知识的掌握，学校也因此偏重对于“双基”的训练，学生的实际能力很难有所提升。本次测试是对学生数学建模能力的考察，数学知识的影响相对较小，因而与数学学业成绩间并未显示有相关关系。这也进一步启示我们，不同数学学业表现层次的学生均有获得较高数学建模能力的可能性。

最后，目前高中的建模教学多以选修课程、社团等方式开展，学生的参与率、投入程度均不够。且此类教学多以教师的讲授为主，学生实际操作、自主建模的机会不多，建模能力自然难以提升。此外，通过短期的建模教学，学生能够了解数学建模的相关常识、基本流程，知道对于各类模型的求解与处理方式，因而能增强其解释与评价模型的意识与模型求解能力。而简化与构建数学模型的能力的培养绝非一旦一夕之功，需要通过长久积淀、学生自主实践而逐步提升。

第5章 结论与建议

本章在测试调查的基础上，得出研究结论，并根据测试所反映出的问题，尝试为中学数学建模教学提出建议，最后阐述研究展望。

5.1 主要研究结论

本研究根据调查结果，得到学生建模水平情况的主要结论如下：

- （1）该校高二学生的数学建模能力较低，整体水平处于中等偏下，且学生个体间的能力差异较大。
- （2）高中生的模型简化与构建能力的平均水平处于水平 1、2 之间，即能够“再现”、套用标准数学模型，但还不足以达到“联系”水平——对标准模型进行迁移与重组；但大部分学生能根据对现实问题的理解进行简化，并通过尝试改进标准模型，来实现模型的构建。
- （3）高中生的模型求解能力平均处于水平 1，即能够模仿已学案例进行简单的数学运算，但不具备数学技术的基本操作能力。
- （4）高中生的模型解释与评价能力平均为水平 1，即能够结合实际情境，对所得数学结果进行解释、验证，但不能对所建模型进行优缺点评价、完善改进与应用推广。
- （5）学生的数学建模子能力与学业成绩间均不存在相关关系，其中模型的简化与构建能力与学业成绩间无显著相关关系，而模型求解、解释与评价能力与数学学业成绩的正相关关系极弱。
- （6）短期建模教学对学生求解、解释与评价模型能力发展有显著影响，对学生简化与构建模型能力的促进作用较小。

5.2 对中学数学建模教学的建议

结合研究结论，对中学数学建模教学提出如下几点建议。

第一，广泛教学，长期强化建模意识。建模教学最重要的是要面向所有人，让不同层次的学生都能提升自己的数学建模能力。由于学生的建模能力水平与其数学学业

成绩并不相关，因此不同数学学业层次的学生都有发展建模能力的同等可能，数学学业表现不佳的学生同样可能具备较高的建模水平. 对学生进行建模能力培养时，不必有所顾虑，可以通过尝试开展多样化的教学形式来激发学生的参与兴趣. 同时，学生建模能力的培养绝不是一朝一夕之功，本质上是通过数学活动经验、数学思想的长期积累来提升学生的“四能”，因而需要长期的渗透，建模教学要走向“常态化”. 除了开设建模选修课外，在日常的教学中，教师也应渗透用数学知识工具或技术解决实际问题的意识，体现数学与现实世界的紧密联系.

第二，有计划、分阶段、有目标地实施建模教学. 建模教学应有计划、有阶段地进行，并需明确各阶段的培养目标. 初期的建模教学意在指导学生“入门”，就可以利用问题示例展示数学建模的完整过程，使学生形成对数学建模的本质、完整流程、基本模型的求解等的初步认知，进而因势利导，逐步让学生从局部走向整体、从模仿走向自主. 需注意的是，情境要源于现实，重在使学生充分经历“数学化”过程，培养问题简化与模型构建能力，以帮助更多学生从模型的“再现”水平过渡到“联系”水平. 而待学生“入门”后，教师需要注意角色的转变，教学形式要以学生自主实践为主. 通过学生的实际操作、交流讨论来组织建模活动，才能切实发展其建模能力. 例如，指导学生研读优秀建模论文，体会选题、开题、做题、结题中的思路，鼓励学生在课后参与数学建模项目竞赛等等. 这一阶段的教学除了鼓励多元思路、创新思维外，还应注重学生“元认知”的形成，激发学生对模型的“自我”反思与评价：所建数学模型是否符合实际，还可以如何完善改进模型，模型是否能推广应用于其他问题……

第三，以能力为导向，实行多元评价方式. 由于数学建模是一种能力而非知识，对于建模教学的评价，要摆脱传统的知识导向评价观念的束缚，转为能力导向，关注学生多元能力的发展，例如数学阅读、探索发现、信息挖掘、合作学习、交流展示能力等. 具体评价方式上，除了传统的纸笔测试、建模竞赛外，还可以尝试“档案袋评价”等形成性评价，关注学生建模能力的纵向发展.

第四，增强研究意识，发展教师专业素养. 所谓“想要给学生一杯水，就先要有一潭活水”，因此在建模教学中，教师也需更新知识技能，提高自身素养. 除了掌握常用的几何画板等技术，建模教学教师还可以尝试学习 GeoGebra、Matlab 等应用操作. 此外，对数学建模课例资源的开发、建模教学形式的创新也是教师需要面对的重要功课.

5.3 研究不足与展望

本研究在相关理论基础上，对已有评价框架进行细化，从三个数学建模子能力入手，划分水平层级，并编制测试卷检测苏州工业园区星海实验中学高二学生的水平情况，并从统计学意义上辨析数学建模能力与数学学业成绩间成正相关与否、建模教学对建模能力的影响。但由于研究条件、研究时间、经验水平等局限，研究过程中有一些不足，有待后续研究改进。

首先，本研究所采用的评价框架是对前人所构建框架的改进，但其效度、合理性等尚需要更多的实践来验证。

其次，本研究仅对苏州一所高中的一个年级学生进行调查，样本量较少。所得结论是否能够推广到苏州乃至全国的高中生，需要更多样本进行大规模测试来验证。

再次，本研究运用的评价方式较单一，仅通过纸笔测试只能算是对高中生数学建模能力的近似刻画，未涉及对学生建模过程中所表现出的合作学习、交流分享等能力的评价。后续研究可以采用多样的评价方式，例如通过建模项目对学生合作能力等进行评价。

最后，由于资源条件限制，本研究通过对比接受与未接受建模教学两类学生的建模能力水平，得到建模教学对能力的影响，是对两组独立样本间的差异检验，不能排除智力因素与非智力因素等无关变量的影响。后续研究可以选取同一组被试学生分别进行前测、后测，分析建模教学对学生建模能力的影响，并以此对建模教学做出评价与改进。

参考文献

- [1] 张奠宙, 宋乃庆. 数学教育概论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.
- [2] OECD.PISA2021MathematicsFramework(draft)[EB/OL].[2021-03-16].<https://pisa2021-maths.oecd.org/files/PISA%202021%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf>.
- [3] 黄健, 鲁小莉, 王鸯雨, 徐斌艳.20 世纪以来中国数学课程标准中数学建模内涵的发展[J].数学教育学报, 2019, 28(03): 18-23+41.
- [4] 史宁中, 王尚志.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)解读[M].北京: 高等教育出版社,2020: 93.
- [5] 汤晓春.高中数学教学培养学生数学建模素养的实践[J].教育理论与实践, 2017, 37(26): 62-64.
- [6] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S].北京: 人民教育出版社, 2020.
- [7] Mark M. Meerschaert. Mathematical Modeling[M].Academic Press, 2013: vii-xii.
- [8] 徐稼红.中学数学应用与建模[M].苏州: 苏州大学出版社, 2001.
- [9] Maaß,K. What are modelling competencies?[J].Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 2006, 38(2): 113-142.
- [10] Blum,W.,&Leiß,D. How do students and teachers deal with mathematical modeling problems?[M]// C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S.Khan. Mathematical modelling(ICTMA12): Education, engineering and economics. Chichester: Horwood, 2007: 222-231.
- [11] 喻平.数学学科核心素养要素析取的实证研究[J].数学教育学报, 2016, 25(06): 1-6.
- [12] 姬梁飞.数学建模素养的内蕴隐喻、建构策略及研究展望[J].数学建模及其应用, 2020, 9(04): 116-122.
- [13] OECD, PISA2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy[M].PISA, OECD Publishing, Paris, 2013.
- [14] Jensen,T.H. Assessing mathematical modelling competency[M]// C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan. Mathematical modelling (ICTMA12): Education,

- engineering and economics. Chichester: Horwood, 2007: 141-148.
- [15] 徐斌艳, MatthiasLudwig.中德学生数学建模能力水平的比较分析——以中国上海和德国巴登符腾堡州学生为例[J].上海教育科研, 2008, (8): 66-69.
- [16] Galbraith, P.L.,Stillman,G.,Brown,J., & Edwards,I. Facilitating middle secondary modelling competencies[M]// C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S.Khan. Mathematical modelling(ICTMA12): Education, engineering and economics. UK: Horwood, 2007: 130-140.
- [17] FrejdP., ÄrlebackJ.B.. First Results from a Study Investigating Swedish Upper Secondary Students' Mathematical Modelling Competencies[M]// Kaiser G., Blum W., Borromeo Ferri R., Stillman G.. Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, vol 1. Springer, Dordrecht, 2011: 410-411.
- [18] Haines, C., Crouch,R.. Recognizing Constructs within Mathematical Modelling[J]. Teaching Mathematics and Its Applications, 2001, 20(3): 129-138.
- [19] Houston K. Assessing the “Phases” of Mathematical Modelling[M]// Blum W., Galbraith P.L., Henn HW., Niss M.. Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study. Springer, 2007: 255.
- [20] 喻平.数学核心素养评价的一个框架[J].数学教育学报, 2017, 26(02): 19-23+59.
- [21] 李华, 胡典顺.基于数学核心素养评价框架的试卷测评研究——以 2019 年高考全国卷为例[J].数学教育学报, 2020, 29(02): 18-23.
- [22] 沐方华, 洪雨沛.基于数学建模素养评价的试题分类框架研究[J].中学数学教学, 2020(02): 1-3+28.
- [23] 杨静.高中生数学建模能力评价研究[D].苏州大学, 2017.
- [24] 沐方华, 董洁.新课标背景下数学建模能力的评价研究——基于 PISA 和 TIMSS 数学测评框架的对比分析[J].中学数学月刊, 2020(07): 59-61.
- [25] 朱娅梅.义务教育阶段学生数学建模能力评价研究[D].华东师范大学, 2014.
- [26] 徐斌艳, LUDWIG Matthias.中学生数学建模能力水平的实验分析[J].中学数学月刊, 2007(11): 1-2+30.
- [27] 纪雪颖.高中学生数学建模能力水平研究[D].华东师范大学, 2010.
- [28] 纪雪颖.高中学生数学建模能力与数学学业成绩关系的调查与分析[J].上海教育

科研, 2009(07): 57-58+70.

- [29] 牛艳杰.高一学生数学建模能力水平的调查与分析[D].苏州大学, 2011.
- [30] 许二龙.高中生数学建模能力水平研究[D].华中师范大学, 2013.
- [31] 崔萍.城镇高中学生数学建模能力水平的调查与研究[D].西北大学, 2014.
- [32] 孙翔宇.上海市高中生数学建模能力的调查与分析[J].教育测量与评价, 2016(06): 44-49.
- [33] 刘佳艳.高三学生数学建模素养的调查研究[D].四川师范大学, 2017.
- [34] 彭墨缘.高中生数学建模能力性别差异研究[D].华东师范大学, 2017.
- [35] 陈英杰.哈尔滨高一学生数学建模能力调查分析[D].哈尔滨师范大学, 2017.
- [36] 张振敏.高中生数学建模能力的调查研究[D].扬州大学, 2018.
- [37] 牛伟强.高中生数学建模能力发展研究[D].华东师范大学, 2019.
- [38] 陈鹭.高一学生数学建模素养现状调查研究[D].集美大学, 2019.
- [39] 宋周丽.高三学生数学建模能力的调查研究[D].湖南科技大学, 2019.
- [40] 张伟旭.高中生数学建模能力的现状调查与分析[D].山东师范大学, 2020.
- [41] 胡冬明.高中生数学建模能力水平的个案研究[D].云南师范大学, 2020.
- [42] 梁馨之.高中生数学建模能力现状调查研究[D].西北师范大学, 2020.
- [43] 马小飞.我国高中生数学建模能力的测评研究[D].中央民族大学, 2020.
- [44] 唐丽艳.高中生数学建模能力发展状况调查研究——以核心素养为视角[J].唐山师范学院学报, 2020, 42(06): 148-153.
- [45] Comap. Mathematical Modeling Handbook II: The Assessments[M/CD]. [2021-04-08].<https://www.comap.com/modelingHB/HBII.html>.
- [46] Bracke M., Geiger A.. Real-World Modelling in Regular Lessons: A Long-Term Experiment[M]// Kaiser G., Blum W., Borromeo Ferri R., Stillman G. Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, vol 1. Springer, Dordrecht, 2011: 525-549.
- [47] Hankeln C., Adamek C., Greefrath G. Assessing Sub-competencies of Mathematical Modelling—Development of a New Test Instrument[M]// Stillman G., Brown J. (eds) Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education. ICME-13 Monographs. Springer, Cham, 2019: 143-160.

- [48] Borromeo Ferri, R.. Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens: Kognitive Analysen zu Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht[M]. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag, 2011:76-80.
- [49] 朱德全, 宋乃庆.现代教育统计与测评技术[M].西南师范大学出版社, 1998.

致谢

自金陵至东吴，四年时光忽然而已。

稿成之际，感慨万千，无以言表，唯有致谢。

首先要感谢的是论文导师王金才，他的指点与鞭策是我论文进展的加速度。

其次，我要感谢苏州工业园区星海实验中学“高中生数学建模能力的培养与评价研究”课题组，感谢顾日新校长、唐秦老师等前辈在测试调查中给予的支持与帮助。

最后，我还要感谢父母恩师的教导、亲友同窗的鼓励。

诸君关怀，宛若曦晖；

承蒙照拂，何其幸哉。

陈子怡

2021 年 5 月

附录 高中生数学建模能力测试卷

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____

亲爱的同学：

你好！感谢你参与本次数学建模能力测试，本试卷主要了解群体情况，不作为个人评价依据。为使所收到的信息真实、可靠，希望你认真解答。感谢你的配合与支持！

考试形式为闭卷，时长45分钟，可以使用计算器、直尺等数学工具，不能使用手机。请你使用黑色或蓝色签字笔答题，注意保持卷面整洁。题目的方法不唯一，作答解答题时，请把自己的思考过程都写出来。

在正式开始答题前，请你如实填写以下问题：

- 你的性别是？
A. 男 B. 女
- 你是否参加过学校的数学建模课程或社团？
A. 是 B. 否

一、简答题：

1. 拉面是我国传统面食，其中的抻面技术甚至衍生出了面艺表演。师傅要先将面团搓成长条，接着双手各握一端将其拉长、对折，不断重复拉长与对折的动作。

如果将每次对折称为“一扣”，请你估计拉4扣时拉面共有多长？



2. 如图是一张铁路轨道的照片，请你根据照片构建数学模型，来估算建造该铁路轨道时，从该地移走了多少土？

（可作草图说明，列出公式并标注变量的含义即可，不需计算出具体数值）



3. 下面是两个已构建的数学模型，你会如何求解？（请给出你能想到的**所有**求解方案，每种方案用一句话说明即可，**不需算出具体数值**；如需利用数学软件技术，请明确软件及操作）

(1) 某工厂生甲、乙两种产品。已知甲产品每吨的生产成本为 20 万元，需要场地 200m^2 ；乙产品每吨的生产成本为 30 万元，需要场地 100m^2 ，该工厂的生产场地为 900m^2 且总投资预算不超出 140 万元。问：如何安排生产可获利最多？

对于上述问题，可建立如下数学模型：

设生产甲产品 x 吨，乙产品 y 吨，利润为 S 万，则据题意可列出约束条件：

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 14, \\ 2x + y \leq 9, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

以及目标函数 $S = 3x + 2y$.

对于上述线性规划模型，你会如何求解？

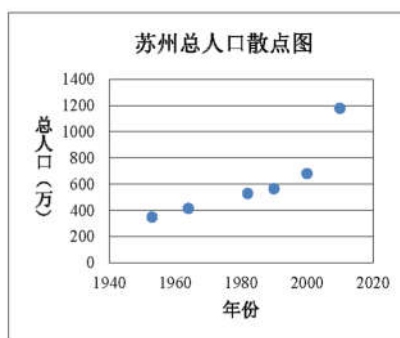
(2) 根据苏州市统计年鉴，可查得从 1953 年至 2010 年苏州历次人口普查数据资料如下：

年份	1953	1964	1982	1990	2000	2010
总人口(万)	348.23	414.13	527.53	564.36	679.22	1176.91

在2020年进行的第7次人口普查的数据尚未公布，请根据前6次的人口普查数据估计2020年苏州市的总人口数。

对于该人口预测问题，可以考虑建立拟合模型解决：

先在坐标系中描出数据的散点图，直观判断散点近似在一条抛物线上；于是考虑用二次函数回归曲线作为拟合模型。



你会如何求解该二次曲线方程？

4. 艾丽估算出她在度假时参观的岩石高约10米.请根据照片判断她的结果是否合理，并说明理由。



二、解答题：

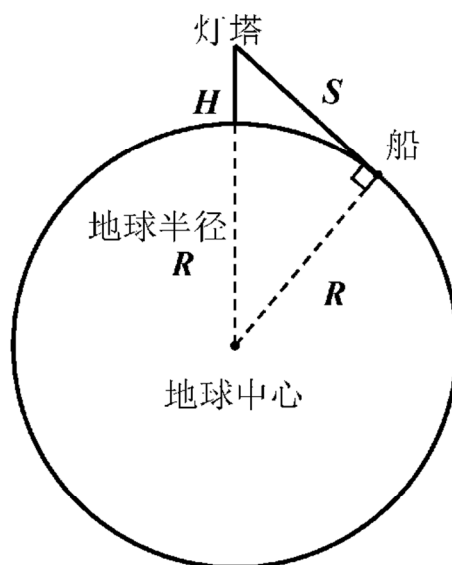
5. 在欧洲的布莱梅港岸边有一座灯塔，高为30.7米，用来警告看到它的船只其位置已经靠近海岸。问：船离海岸线多远时，海员将会第一次从地平线看到灯塔？

对于这个问题，徐娜给出了如下构建数学模型的思路：



首先对问题进行简化，将地球看作球面，船看作点，假设灯塔和船之间可见。

已知灯塔高度 $H = 30.7$ 米 $= 0.0307$ 千米，地球半径 $R \approx 6371$ 千米，设要求的船与灯塔间距离为 S 千米。可以建立如下图所示的数学模型：



接着对图中的直角三角形使用勾股定理，得 $S^2 + R^2 = (R + H)^2$ ，

$$\text{于是 } S = \sqrt{H^2 + 2RH} \approx 19.8 \text{ 千米}$$

因此，可以得到结论：当船离海岸线约 19.8 千米时，海员将会第一次从地平线看到灯塔。

(1) 请你结合实际，对徐娜所建立的模型进行评价，说明模型有何优缺点。

(2) 针对徐娜所建的模型不足，你会如何进行改进？可作图说明。

6. X中学新建了学校食堂，每天午餐开放时间约40分钟，三个年级近1200人在食堂同时用餐。食堂共制作三类餐食：第一类是选餐，学生可凭喜好在已做好的6种菜和几种主食中任意选购；第二类是套餐，有炒饭、面条、盖饭三种，套餐已盛装好，可直接取餐；第三类是西餐。食堂共有16个售饭窗口，目前设置了10个选餐窗口、4个套餐窗口、2个西餐窗口。试运行后，发现在选餐窗口排队等候的人较多，有些学生受时间影响不得不去套餐、西餐窗口购餐。

为了更合理地设置窗口布局，增加学生的用餐满意度，学生会准备在用餐的学生中选出一些人进行问卷调查，并由此设计出优化售饭窗口设置的方案。

请你完成以下问题：

(1) 在发放问卷前，要先明确调查对象。你认为应当如何选取调查对象？请说明调查方式，并明确调查对象的构成及人数。

(2) 你认为影响售饭窗口设定的相关因素有哪些？

(3) 你认为优化售饭窗口的目标是什么？你需要确定哪些变量？

请你根据优化目标，设出相关参变量（可用字母表示），进行数学运算，给出优化后的各类售饭窗口数的数学表达式。

(4) 许沐同学根据调查数据，计算得出优化后的选餐、套餐、西餐窗口数分别为12.45、2.37和1.18，于是他得到“食堂应当设置12个选餐窗口、2个套餐窗口、1个西餐窗口”的结论。他的结论是否合理？请说明理由。

(5) 结合现实，说明你所建立的数学模型有何不足之处？

(6) 你会从哪些方面对模型进行改进？该模型还能应用于哪些其他问题情境中？请举例说明。